第八章　　不定积分

§1　不定积分概念与基本积分公式

[教学目的] 掌握原函数,不定积分的概念和性质．

［**教学要求**］熟练掌握原函数的概念和基本积分公式．
［**教学重点**］基本积分公式；不定积分的几何意义．
［**教学难点**］不定积分的几何意义
[**教学方法**］“系统讲授”结合“问题教学”．
［**教学程序**］

一　原函数与不定积分

1　原函数

定义 1　设函数 $f(x)$ 与 $F(x)$ 在区间 I 上有定义．若 $F'(x)=f(x)$，　$x\in I$，则称

$F(x)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数．

如：$\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 在 R 上的一个原函数；$-\frac{1}{2}\cos 2x$，$\frac{1}{2}\cos 2x+1$，$\sin^2 x$，$-\cos^2 x$ 等都有是 $\sin 2x$ 在 R 上的原函数——若函数 $f(x)$ 存在原函数，则其原函数不是唯一的．

问题 1　$f(x)$ 在什么条件下必存在原函数？若存在，其个数是否唯一；又若不唯一，则有多少个？

问题 2　若函数 $f(x)$ 的原函数存在，如何将它求出？（这是本章的重点内容）．

2　原函数存在定理

定理 8．1　若 $f(x)$ 在区间 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上存在原函数 $F(x)$．

证明：在第九章中进行．

说明：（1）由于初等函数在其定义域内都是连续的，故初等函数在其定义域内必存在原函数（但其原函数不一定仍是初等函数）．（2）连续是存在原函数的充分条件，并非必要条件．

3　原函数之间关系

定理 8．2　设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在在区间 I 上的一个原函数，则

（1）设 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 在在区间 I 上的原函数，其中 C 为任意常量（若 $f(x)$ 存在原函数，则其个数必为无穷多个）．

（2）$f(x)$ 在 I 上的任何两个原函数之间，只可能相差上个常数（揭示了原函数间的关系）．

证明：由定义即可得．

4 不定积分

定义 2　函数 $f(x)$ 在区间 I 上的原函数的全体称为 $f(x)$ 在 I 上的不定积分，记作：

$$\int f(x)dx$$

其中 $\int$ −− 积分号；$f(x)$ −− 被积函数；　$f(x)dx$ −− 被积表达式；x −− 积分变量．

注 1　$\int f(x)dx$ 是一个整体记号；

不定积分与原函数是总体与个体的关系，即若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $f(x)$ 的不定积分是一个函数族 $\{F(x)+C\}$，其中 C 是任意常数，于是，记为：$\int f(x)dx = F(x)+C$.

此时称 C 为积分常数，它可取任意实数．故有

不定积分简单性质

$$[\int f(x)dx]' = f(x)$$——先积后导正好还原；

或 $$d\int f(x)dx = f(x)dx .$$

$$\int f'(x)dx = f(x)+C$$——先导后积还原后需加上一个常数（不能完全还原）.

或 $$\int df(x) = f(x)+C .$$

如：$\int x^2 dx = \dfrac{x^3}{3}+C$，$\int \sin 2x dx = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$.

几何意义：

若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则称 $y=F(x)$ 的图象为 $f(x)$ 的一条积分曲线．于是，$f(x)$ 的不定积分在几何上表示 $f(x)$ 的某一条积分曲线沿纵轴方向任意平移所得一载积分曲线组成的曲线族，如左图．

结论：若在每一条积分曲线上横坐标相同的点处作切线，则这些切线互相平行．

注：　在求原函数的具体问题中，往往是先求出全体原函数，然后从中确定一个满足条件 $F(x_0)=y_0$（称之为初始条件，一般由具体问题确定）的原函数，它就是积分曲线族中通过点 (x_0, y_0) 的那条积分曲线．如：见 P179.

二　基本积分公式

1 基本积分表

由于不定积分的定义不象导数定义那样具有构造性，这就使得求原函数的问题要比求导数难得多，因此，我们只能先按照微分法的已知结果去试探．首先，我们把基本导数公式改写成基本积分公式：

1. $\int 0dx = C$；2. $\int 1dx = \int dx = x + C$；3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$，$(\alpha \neq -1, x>0)$；

4. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$，$(x\neq 0)$；5. $\int e^x dx = e^x + C$；

6. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a}+C$，　$(a>0, a\neq 1)$；7. $\int \cos ax dx = \dfrac{1}{a}\sin ax + C$，$(a\neq 0)$；

8. $\int \sin ax dx = -\dfrac{1}{a}\cos ax + C$，$(a \neq 0)$；9. $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$；

10. $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$；11. $\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + C$；

12. $\int \csc x \cdot \cot x dx = -\csc x + C$；13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x + C = -\arccos x + C_1$；

14. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C = -arc\cot x + C_1$.

注意：上述基本积分公式一定要牢记，因为其它函数的不定积分经运算变形后，最终归结为这些基本不定积分．另外，还须借助一些积分法则才能求出更多函数的不定积分．

2　线性运算法则

定理 8.3　若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 I 上都存在原函数，k_1, k_2 为两个任意常数，则 $k_1 f(x) + k_2 g(x)$ 也存在原函数，且

$$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x) dx + k_2 \int g(x) dx$$ （积分的线性）.

证明：由定义即得．

注：线性法则的一般形式为：$\int \sum_{i=1}^{n} k_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^{n} k_i \int f_i(x) dx$.

例 1　$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$,

则 $\int p(x) dx = \frac{a_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_1}{n} x^n + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} x^2 + a_n x + C$.

例 2　$\int \frac{x^4+1}{x^2+1} dx = \int (x^2 - 1 + \frac{2}{x^2+1}) dx = \frac{x^3}{3} - x + 2\arctan x + C$.

例 3　$$\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x} = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int (\csc^2 x + \sec^2 x) dx$$
$$= -\cot x + \tan x + C.$$

例 4　$$\int \cos 3x \cdot \sin x dx = \frac{1}{2} \int (\sin 4x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2}(-\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x) + C$$
$$= -\frac{1}{8}(\cos 4x - \cos 2x) + C.$$

例 5　$$\int (10^x - 10^{-x})^2 dx = \int (10^{2x} + 10^{-2x} - 2) dx = \int [(10^2)^x + (10^{-2})^x - 2] dx$$
$$= \frac{1}{2\ln 10}(10^{2x} - 10^{-2x}) - 22 + C.$$

作业　P181　5（1）-（10）

§2　换元积分法与分部积分法

[**教学目的**] 掌握第一、二换元积分法与分部积分法.
[**教学要求**] 熟练掌握换元积分法和分部积分法，正弦代换，正切代换，正割代换，根式代换的技巧.
[**教学重点**] 换元积分法和分部积分法.
[**教学难点**] 代换的选择技巧
[**教学方法**] 系统讲授法.
[**教学程序**]

一　换元积分法

定理8．4（换元积分法） 设$g(u)$在$[\alpha,\beta]$上有定义，$u=\varphi(x)$在$[a,b]$上可导，且$\alpha\le\varphi(x)\le\beta$，$x\in[a,b]$，记

$$f(x)=g(\varphi(x))\varphi'(x),\quad x\in[a,b].$$

（1）（第一换元积分法）若$g(u)$在$[\alpha,\beta]$上存在原函数$G(x)$，则$f(x)$在$[a,b]$上也存在原函数$F(x)$，且有 $F(x)=G(\varphi(x))+C$，即

$$\int f(x)dx=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int g(u)du=G(u)+C=G(\varphi(x))+C.$$

也可写为：

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int g(\varphi(x))d\varphi(x)=（令\ \varphi(x)=u）=\int g(u)du=G(u)+C$$

$$=（代回\ u=\varphi(x)）\ G(\varphi(x))+C.$$

（2）（第二换元积分法） 又若$\varphi'(x)\ne0$，$x\in[a,b]$，则上述命题（1）可逆，即当$f(x)$在$[a,b]$存在原函数$F(x)$时，$g(u)$在$[\alpha,\beta]$上也存在原函数$G(u)$，且$G(u)=F(\varphi^{-1}(u))+C$，即

$$\int g(u)du\ （令\ u=\varphi(x)）=\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(x)dx=F(x)+C\ （代回\ x=\varphi^{-1}(u)）$$

$$F(\varphi^{-1}(u))+C.$$

证明：由不定积分的定义及求导法则即得.

注：在第一换元积分法中是将被积函数的某一部分视为一个整体看作一个新的积分变量；在第二换元积分法中是用某一函数来代替其积分变量.

（一）第一换元积分法（凑微法）

例1　求 $\int\sin^3x\cos xdx$.

例2　求 $\int\frac{dx}{a^2+x^2}\ (a>0)$.

【分析】 若令$u=\frac{x}{a}$（第一换元法），可将积分化为：$\int\frac{du}{1+u^2}$；

例 3　求　$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

【分析】　若令 $u = \frac{x}{a}$（第一换元法），可将积分化为：$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$；同时也可令 $x = a\sin u$，或

例 4　求　$\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$.

【分析】　因 $\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})$，故可分别令 $u = x - a$，$u = x + a$（第一换元法），可将积分化为：$\int \frac{du}{u}$.

例 5　求　$\int \sec x dx$.

解：（方法一）$\int \sec x dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{d\sin x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + C$.

（方法二）$\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{d(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}$

$= \ln|\sec x + \tan x| + C$.

使用第一换元积分法的关键：在于把被积表达式 $f(x)dx$ 凑成 $g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x)$ 形式，从而作变换 $u = \varphi(x)$，化积分为：$\int g(u)du$. 但要注意的是最后要换回原积分变量.

（二）第二换元积分法

第二换元积分法的目的同第一换元法一样，也是被积函数化为容易求得原函数的形式，但最终同样不要忘记变量还原.

例 6 求　$\int \frac{du}{\sqrt{u} + \sqrt[3]{u}}$.

【分析】　为了去掉被积函数中的根号，取根次数 2 和 3 的最小公倍数 6，并令 $u = x^6$，则可化简积分.

例 7 求　$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx\ (a > 0)$.

【分析】　为了去掉被积函数中的根号，可令 $x = a\sin t$，也可令 $x = a\cos t$.

例 8 求　$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} (a > 0)$.

【分析】　为了去掉被积函数中的根号，可令 $x = a\sec t$，也可令 $x = a\csc t$.

例 9 求　$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}\ (a > 0)$.

【分析】　为了化简被积函数，可令 $x = a\tan t$，或 $x = a\cot t$.

解：令 $x = a\tan t$，$|t| < \frac{\pi}{2}$，于是，有

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2 t}{a^4 \sec^4 t} dt = \frac{1}{a^3}\int \cos^2 t dt = \frac{1}{2a^3}\int (1+\cos 2t) dt$$

$$= \frac{1}{2a^3}(t+\sin t\cos t) + C = \frac{1}{2a^3}(\arctan\frac{x}{a} + \frac{ax}{x^2+a^2}) + C .$$

例 10 求 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

解：[方法一] 第一换元积分法：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{1}{x}\cdot \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} d(\frac{1}{x}) = \int \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}} du = \sqrt{1-u^2} + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C , \qquad (u = \frac{1}{x}) .$$

[方法二] 第二换元积分法（令 $x = \sec t$ ）：

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{\sec t\cdot\tan t}{\sec^2 t\cdot\tan t} dt = \int \cos t dt = \sin t + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C$$ （优于方法一!!）.

二　　分部积分法

定理 8.5（分部积分法）　若 $u(x)$ 与 $v(x)$ 可导，不定积分 $\int u'(x)v(x)dx$ 存在，则不定积分 $\int u(x)v'(x)dx$ 也存在，且 $\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$ ，（此式称为分部积分公式）；

即　　　$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x)$ ，（此式称为分部积分公式）.

证明：由 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ 即可得.

例 11 求 $\int x\cos x dx$.

【分析】 令 $u = x$ ， $dv = \cos x = d\sin x$ ，用分部积分分式即可求出.

解：令 $u = x$ ， $dv = \cos x = d\sin x$ ，则 $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

例 12　求 $\int \arctan x dx$.

说明：在熟练后， u, v 不须写出.

解： $\int x\arctan x dx = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$.

例 13 $\int x^3 \ln x dx$.

解： $\int x^3 \ln x dx = \int \ln x d(\frac{x^4}{4}) = \frac{1}{4}(x^4\ln x - \int x^3 dx) = \frac{x^4}{16}(4\ln x - 1) + C$.

注：分部积分可多次使用.

例 14　求$\int x^2 e^{-x} dx$.

解：$\int x^2 e^{-x} dx = \int x^2 d(-e^{-x}) = -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx \ = -x^2 e^{-x} + 2\int x d(-e^{-x})$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\int e^{-x} dx = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2) + C .$$

例 15　　求$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx$ 和 $I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx$.

解：$I_1 = \frac{1}{a}\int \cos bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}(e^{ax} \cos bx + b\int e^{ax} \sin bx) \ = \frac{1}{a}(e^{ax} \cos bx + bI_2)$.

$I_2 = \frac{1}{a}\int \sin bx d(e^{ax}) = \frac{1}{a}(e^{ax} \sin bx - bI_1)$.

由此得到　　$\begin{cases} aI_1 - bI_2 = e^{ax} \cos bx \\ bI_1 + bI_2 = e^{ax} \sin bx \end{cases}$

解此方程组，求得

$$I_1 = \int e^{ax} \cos bx dx = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} + C; I_2 = \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C$$

结论：当 n 是正整数时，如$\int x^n e^x dx$，$\int x^n \sin x dx$，$\int x^n \cos x dx$，这种类型的积分，都可用分部积法解决，这时，设$u = x^n$，dv分别为$e^x dx$，$\sin x dx$，$\cos x dx$；同样$\int x^n \ln x dx$，$\int x^n \arctan x dx$，$\int x^n \arcsin x dx$这种类型的积分，也可用分部积分法解决，这时，设$dv = x^n dx$，u分别为$\ln x$，$\arctan x$，$\arcsin x$.

$\int e^{kx} \sin(ax + b) dx$，$\int e^{kx} \cos(ax + b) dx$　（a，b，k为常数）这种类型的积分如例 15 那样，也可以用分部积分法来解决.

作业　P189　1（1）(3)-(25)，P190 2(1)—(6)

§3　有理函数和可化为有理函数的不定积分

[教学目的] 会计算有理函数和可化为有理函数的不定积分.

[教学要求] (1)会计算有理函数的不定积分、三角函数有理式的不定积分、某些无理根式的不定积分；

(2)会利用欧拉代换求某些无理根式的不定积分.

[教学重点] 有理函数的不定积分.

[教学难点] 利用欧拉代换求某些无理根式的不定积分.

[教学方法] 系统讲授法.

[教学程序]

一　有理函数的不定积分

有理函数的一般形式为：

$$R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

其中n,m为非负整数，$a_0,a_1,\cdots,a_n$ 与$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是常数，且$a_0\cdot b_0\neq 0$. 若$m>n$，则称$R(x)$为真分式；若$m\le n$，则称$R(x)$为假分式.

结论：　假分式=多项式+真分式.

因此，对有理函数的积分，只要讨论真分式的积分即可.

重要结论：任何一个有理真分式必定可以表示为若干个形如（称为部分分式）：

（1）$\dfrac{A}{(x-a)^k}$；　　（2）$\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}(p^2-4q<0)$.

的真分式之和，其中 A，B，$a,p,q,$为常数，k为正整数.

因此，对有理真分式的积分只要讨论上述四种形式的真分式的积分即可.

（1）$\displaystyle\int\frac{dx}{x-a}=\ln|x-a|+C$.

（2）$\displaystyle\int\frac{dx}{(x-a)^k}=\frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}+C$，　$(k>1)$.

（3）$\displaystyle\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx$，令$t=x+\dfrac{p}{2}$，并记$r^2=\dfrac{4q-p^2}{4}$，$N=B-\dfrac{pA}{2}$，

则

$$\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{(x+\frac{p}{2})^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx=A\int\frac{tdt}{t^2+r^2}+N\int\frac{dt}{t^2+r^2}$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+r^2)+\frac{N}{r}\arctan\frac{t}{r}+C.$$

（4） 同（3）可得 $(k \geq 2)$，

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k} = A\int \frac{tdt}{(t^2+r^2)^k} + N\int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$$

$$= \frac{A}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}} + N\int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}.$$

记 $I_k = \int \frac{dt}{(t^2+r^2)^k}$，则

$$I_k = \frac{1}{r^2}\int \frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}dt = \frac{1}{r^2}I_{k-1} - \frac{1}{r^2}\int \frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}dt$$

$$= \frac{1}{r^2}I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)}\int td(\frac{1}{(t+r)^{k-1}})$$

$$= \frac{1}{r^2}I_{k-1} + \frac{1}{2r^2(k-1)}[\frac{t}{(t^2+r^2)^{k-1}} - I_{k-1}]$$ 于是，有递推公式

$$I_k = \frac{t}{2r^2(k-1)(t^2+r^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2r^2(k-1)}I_{k-1}.$$

将这些结果代回，即可求得所求积分.

例 1 求 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}dx$.

解：因本题中，被积函数的分母不能再分解，故

$$\frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{(x^2-2x+2)+(2x-1)}{(x^2-2x+2)^2} = \frac{1}{x^2-2x+2} + \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2};$$

而 $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2+1} = \arctan(x-1)+C_1$；

$$\int \frac{2x-1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int \frac{(2x-2)+1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \int \frac{d(x^2-2x+2)}{(x^2-2x+2)^2} + \int \frac{d(x-1)}{[(x-1)^2+1]^2}$$

$$\frac{-1}{x^2-2x+2} + \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}(t = x-1);$$

又 $I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan t + C_2$

$$= \frac{x-1}{2(x^2-2x+2)} + \frac{1}{2}\arctan(x-1) + C_2;$$

故 $\int \frac{x^2+1}{(x^2-2x+2)^2}dx = \frac{x-3}{2(x^2-2x+2)} + \frac{3}{2}\arctan(x-1)+C$.

课堂练习： $P198, T1.(1)$、（3）、（5）.

二　三角有理式的不定积分

由 $u(x)$ ， $v(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于 $u(x)$ ， $v(x)$ 的有理式，并记为 $R(u(x),v(x))$. 对于三角有理式的不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$. 一般通过变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ （万能变换），可把它化为有理函数的积分：

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};\qquad dx=\frac{2}{1+t^2}dt;$$

故 $$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt.$$

例 2　求 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}dx$.

注意：上述变换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 对三角有理式的不定积分总是有效的，但并不一定是最好的变换，在实际计算中要注意选择不同的变换.

1)　若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则可令 $t=\cos x$, 如求 $\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$

2)　若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$ ，则可令 $t=\sin x$ ，如求 $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$.

3)　若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$ ，则可令 $t=\tan x$ ，如 P195 例 4.

三　某些无理根式的不定积分

1. $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \quad (ad-bc\neq 0)$ 型的不定积分. 只要令 $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}=t$ 就可有理化.

例 3　求 $\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx$.

说明：用下面的方法计算本题较为简单

$$\int\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}dx=\int\frac{x+2}{x}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}-\int\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{x})^2}}d(\frac{2}{x}).$$

例 4　求　$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}$.

解：令 $t=\sqrt{\frac{1+x}{2-x}}$ 即可有理化，（略）.

说明：用下面的方法计算本题较为简单

$$\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{2+x-x^2}}=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{3(1+x)-(1+x)^2}}=\int\frac{dx}{(1+x)^2\sqrt{\frac{3}{1+x}-1}}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{1+x}-1}}d(\frac{3}{1+x}-1)=-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{1+x}-1}+C.$$

2．$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ 型不定积分 ($a>0$ 时，$b^2-4ac\neq 0$，$a<0$ 时，$b^2-4ac>0$).

一般地，当 $a>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+ba+c}=\sqrt{a}x+t$ 即可将积分有理化之；当 $c>0$ 时，令 $\sqrt{ax^2+ba+c}=xt\pm\sqrt{c}$ 即可将积分有理化之．以上两种变换均称为欧拉变换.

注意：初等函数的原函数不一定是初等函数，因此，在初等函数的范围内，某些初等函数的原函数是不存在的，即使该函数可积（见教材 P198）.

作业　P200　1（1）（2）（3），2（1）（3）

第九章　定积分

§1　定积分概念

[教学目的] 掌握定积分的定义,了解定积分的几何意义和物理意义.

［**教学要求**］要求掌握定积分的定义，并了解定积分的几何意义

[**教学重点**] “分割、近似求和、取极限”变量数学思想.

[**教学难点**] “分割、近似求和、取极限”变量数学思想的建立

[**教学方法**] “系统讲授”结合“问题教学”.

［**教学程序**］

一　问题的提出

不定积分和定积分是积分学中的两大基本问题，求不定积分是求导数的逆运算，而定积分则是某种特殊和式的极限，它们之间既有本质的区别，但也有紧密的联系．先看两个实例．

1．曲边梯形的面积　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$．则由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$， $x=b$ 以及 x 轴所围成的平面图形（如下左图），称为曲边梯形．下面将讨论该曲边梯形的面积（这是求任何曲线边界图形的面积的基础）.

在区间 $[a,b]$ 内任取 $n-1$ 个分点，依次为

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

它们将区间 $[a,b]$ 分割成 n 个小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$．记为 Δx_i，即 $\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$．并用 Δx_i 表示区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的长度，记 $|T|=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，再用直线 $x=x_i$， $i=1,2,\cdots,n-1$ 把曲边梯形分割成 n 个小曲边梯形（如上右图）．在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$， $i=1,2,\cdots,n$ 上任取一点 ξ_i，$i=1,2,\cdots,n$，作以 $f(\xi_i)$ 为高，Δx_i 为底的小矩形，其面积为 $f(\xi_i)\ \Delta x_i$，当分点不断增多，又分割得较细密时，由于 $f(x)$ 连续，它在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的变化不大，从而可用这些小矩形的面积近似代替相应的小曲边梯形的面积．于是，该 曲边梯形面积的近似值为 $S\approx\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$．从而

$$S=\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i.$$

2．变力所作的功 W　设质点受力 F 的作用沿 x 轴由点 a 移动到点 b，并设 F 处处平行于 x 轴（如下图），同上述，有 $W\approx\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i$，而 $W=\lim_{|T|\to 0}\sum_{i=1}^{n}F(\xi_i)\Delta x_i$．

二　定积分的定义

定义 1　设闭区间 $[a.b]$ 内有 $n-1$ 个点，依次为

$$a=x_0<\ x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b,$$

将闭区间$[a.b]$分成n个小区间，记为$\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$，$i=1,2,\cdots,n$，简记为$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，或$T=\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$并称为区间$[a.b]$的一个分割．同时也用$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$，并记$\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$称为分割 T 的模．

定义 2　设$f(x)$是定义在$[a.b]$上的一个函数，对于$[a.b]$的一个分割$T=\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，任取点$\xi_i\in\Delta x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，并作和式$\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$．称此和式为$f(x)$在$[a.b]$关于分割 T 的一个积分和，也称黎曼和．（注：积分和既与分割 T 有关，也与点ξ_i的取法有关）．

又设J是一个确定的实数，若对任给的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，使得对$[a.b]$的任意分割 T，以及$\xi_i\in\Delta x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，只要$\|T\|<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-J\right|<\varepsilon\ .$$

则称函数$f(x)$在$[a.b]$上可积或黎曼可积．数J称为函数$f(x)$在$[a.b]$上的定积分或黎曼积分，记作：

$$J=\int_a^b f(x)dx$$

其中$f(x)$称为被积函数，x称为积分变量，$[a.b]$称为积分区间，$f(x)dx$称为被积式，a,b分别称为积分的下限和上限．

定积分的几何意义：定积分的几何意义就是-------由连续曲线$y=f(x)\ge 0$及直线$x=a,x=b,y=0$所围曲边梯形的面积．

注：定积分$\int_a^b f(x)dx$的值只与被积函数$f(x)$及积分区间$[a.b]$有关，而与积分变量所用的符号无关．

例 1　求由抛物线$y=x^2$，$x\in[0,1]$，及$y=0$所围平面图形的面积．

解　（在用定义求定积分时，一般都要选用特殊的分割 T 和特殊的点ξ_i），如下图：

取分割 T 为n等份，并取$\xi_i=\dfrac{i-1}{n}$，$i=1,2,\cdots,n$．则所为面积为：

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(\frac{i-1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}(i-1)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}=\frac{1}{3}\ .$$

第十章 定积分的应用

§ 1 平 面 图 形 的 面 积

教学目的：掌握平面图形面积的计算公式．

教学要求：1) 掌握平面图形面积的计算公式，包括参量方程及极坐标方程所定义的平面图形面积的计算公式．

2）较高要求：提出微元法的要领．

教学重点：平面图形面积的计算公式．

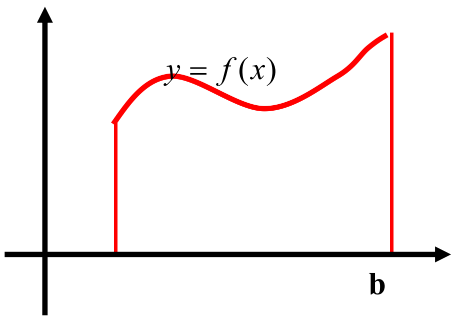
教学难点：平面图形面积的计算公式及其应用．

教学方法：讲授为主．

教学程序：

1、直角坐标系下平面图形的面积 ：

由定积分的几何意义，连续曲线 $y = f(x)\ (\geq 0)$ 与直



线 $x = a$, $x = b\ (b > a)$, x 轴所围成

的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

若 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上不都是非负的，

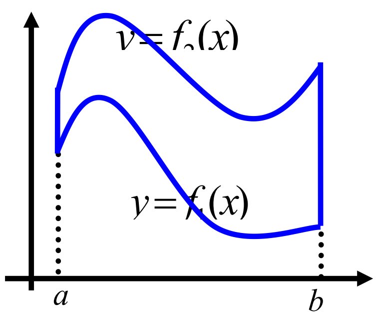
则所围成的面积为

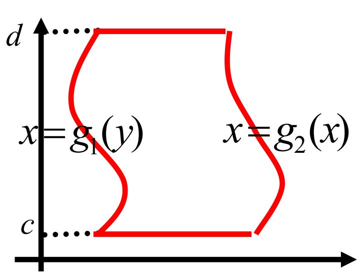
$$A = \int_a^b | f(x) | dx$$

一般的，有两条连续曲线 $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ 及直线

$x = a$, $x = b\ (b > a)$ 所围成的平面图形的面积为

$$A = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad A = \int_c^d [g_2(y) - g_1(y)]dy$$





例 1、 求 $y = x^2$， $x = y^2$ 所围的面积 S.

例 2、 例 2、求 $y = \sin x$ 、 $y = \cos x$ 在 $[0, 2\pi]$ 上所围图形的面积.

例 3、已知 $y=ax^2+bx$ 通过点$(1,2)$与 $y=-x^2+2x$ 有个交点 $x_1>0$，又 a<0，求 $y=ax^2+bx$ 与 $y=-x^2+2x$ 所围的面积 S，又问 a,b 为何值时，S 取最小值？

例 4、求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x-y=4$ 所围成的图形的面积.

2、参数方程形式下的面积公式

若所给的曲线方程为参数形式：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$），其中 y(x)是连续函数，x(t)是连续可微函数，且 $x'(t)\ge 0$ 且 $x(\alpha)=a$，$x(\beta)=b$，那么由 $\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$，x 轴及直线 x＝a，x＝b 所围图形的面积 S 的公式为 $S=\int_\alpha^\beta|y|dx(t)$.（$\alpha<\beta$）

例 5、求旋轮线：$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\y=a(1-\cos t)\end{cases}$ （a>0）一个拱与 x 轴所围的图形的面积.

例 6、求椭圆 $\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}$ （a>0，b>0）的面积 S.

3、极坐标下的面积公式

设曲线的极坐标方程是：$r=r(\theta)$，$\alpha\le\theta\le\beta$，$r(\theta)\in C[\alpha,\beta]$，则由曲线 $r=r(\theta)$，射线 $\theta=\alpha$ 及 $\theta=\beta$ 所围的扇形面积 S 等于 $S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)d\theta$.

例 7、求双纽线 $r^2=2a^2\cos2\theta$ 所围图形面积 S.

例 8、求由 $r=\sin^2\frac{\theta}{3}$，$0\le\theta\le3\pi$，所决定的外层曲线和内层曲线之间的面积 S.

例 9、求三叶形成曲线 $r=a\sin3\theta$ （a>0）所围图形面积.

作业：P142　1，　2，　4

§ 2　由平行截面面积求体积

教学目的：掌握由平行截面面积求体积的计算公式.

教学要求：掌握由平行截面面积求体积的计算公式.

教学重点：由平行截面面积求体积的计算公式

教学难点：进一步领会微元法的要领.

教学方法：讲授为主.

教学程序：

（一）一般体积公式：

设一几何体夹在 x＝a 和 x＝b（a<b）这两个平行平面之间，用垂直于 X 轴的平面去截此几何体，设载

面与 X 轴交点为（x，0），可得的截面面积为 S（x），如果 S(x)是[a,b]上的（R）可积函数，则该几何体的体积 V 等于：$V=\int_a^b S(x)dx$.

例 1　求两圆柱

$$x^2+y^2=a^2\ ,\ x^2+z^2=a^2$$

所围的立体体积

例 2 求底面积为 S，高为 h 的斜柱体的体积 V.

例 3、求由椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 所围的几何体体积.（a,b,c>0)

（二）旋转体的体积

设 y＝y(x)于[a,b]（R）可积，曲线 y＝y(x)，a≤x≤b，绕 x 轴产生旋转体的截面积为 S(x)＝$\pi y^2(x)$，则

$$V_{\text{旋体}}=\ \int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b y^2dx$$

例 4、求底半径为 r，高为 h 的圆锥体的体积 V.

例 5 求由圆 $x^2+(y-R)^2\le r^2(0<r<R)$ 1 绕 x 轴所产生的旋转体体积.

作业：P246　2（2）（4），　3

§3. 平面曲线的弧长与曲率

教学目的：掌握平面曲线的弧长与曲率.

教学要求：掌握平面曲线的弧长计算公式.

教学重点：平面曲线的弧长计算公式.

教学难点：平面曲线的弧长计算公式及其应用.

教学方法：讲授为主.

教学程序：

1、曲线的长度（弧长）的概念

一条线段的长度可直接度量，但一条曲线段的“长度”一般却不能直接度量，因此需用不同的方法来求.

设平面曲线 C 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$）给出，设 $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ 是[α,β]的一个划分 [$t_0=\alpha,t_n=\beta$]，即 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，它们在曲线 C 上所对应的点为 $M_0=(x(t_0),y(t_0))$，$M_1=(x(t_1),y(t_1))$，…，$M_n=(x(t_n),y(t_n))$. 从端点 M_0 开始用线段一次连接这些分点 M_0，M_1，…，M_n 得到曲线的一条内接折线，用 $\overline{M_{i-1}M_i}$ 来表示 $M_{i-1}M_i$ 的长度，则内接折线总长度为

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[(x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[(y(t_i)-y(t_{i-1})]^2}$$

曲线 C 的弧长 S 定义为内接折线的总长在 $\|p\|=\max\Delta t_i\to 0$ 时的极限：

$$S=\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}=\lim_{\|p\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{[(x(t_i)-x(t_{i-1})]^2+[(y(t_i)-y(t_{i-1})]^2}$$

如果 S 存在且为有限，则称 C 为可求长曲线.

2、弧长公式

设曲线 C：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$），且 $x(t)$， $y(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上可微且导数 $x'(t)$， $y'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上可积，曲线 C 在$[\alpha,\beta]$无自交点，则曲线 C 的弧长 S 为：

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{dx^2+dy^2}$$

注：其它形式的弧长公式

（1）设 $y=y(x)$ 在[a,b]上可微且导数 $y'(x)$ 可积，则曲线 $y=y(x)$ （a≤x≤b）的弧长 S 为：

$$S=\int_{a}^{b}\sqrt{1+y'(x)}dx$$

（2）若曲线极坐标方程 $r=r(\theta)$ ， $\alpha\le\theta\le\beta$ ，则当 $r(\theta)$ 在$[\alpha,\beta]$上可微，且 $r'(\theta)$ 可积时，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+r'^2}d\theta$$

（3）空间曲线$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$），弧长 S 为

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}dt$$

其中 x(t)，y(t)，z(t)在$[\alpha,\beta]$上可微，导数 $x'(t)$， $y'(t)$， $z'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$上可积且曲线 C 在 $[\alpha,\beta]$上无自交点.

例 1、求圆周 $x=R\cos t$ ， $y=R\sin t$ ， $0\le t\le 2\pi$ 的弧长 S.

例 2、求抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$， $0\le x\le 1$ 的弧长 S. 例 3、求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（b>a>0）的弧长 S.

3、弧长的微分

设 C：$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$ （$\alpha\le t\le\beta$）是光滑曲线（ $x'(t)$， $y'(t)$ 在$[\alpha,\beta]$连续且 $x'^2(t)+y'^2(t)\ne 0$ ）；且无自交点. 若把公式中的积分上限 β 改为 t，就得到曲线 C，由端点 M_0 到动点 $M(x(t),y(t))$ 的一段弧长.

$$S=\int_{\alpha}^{t}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

由上限函数的可微性知 $S'(t)$ 存在，$\dfrac{dS(t)}{dt}=\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\Rightarrow dS=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

§4　旋转曲面的面积

教学目的：理解微元法的基本思想和方法，掌握旋转曲面的面积计算公式.

教学要求：掌握求旋转曲面的面积的计算公式，包括求由参数方程定义的旋转曲面的面积；掌握平面曲线的曲率的计算公式.

教学重点：旋转曲面面积的计算公式.

教学难点：由参数方程定义的旋转曲面的面积.

教学方法：系统讲授法＋演示例题.

教学程序：

一　微元法

用定积分计算几何中的面积，体积，弧长，物理中的功，引力等等的量，关键在于把所求量通过定积分表达出来. 元素法就是寻找积分表达式的一种有效且常用的方法. 它的大致步骤是这样的：设所求量 U 是一个与某变量（设为 x）的变化区间 $[a,b]$ 有关的量，且关于区间 $[a,b]$ 具有可加性. 我们就设想把 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，并把其中一个代表性的小区间记坐 $[x,x+\mathrm{d}x]$ ， 然后就寻求相应于这个小区间的部分量 ΔU 的近似值（做这一步的时候，经常画出示意图帮助思考），如果能够找到 ΔU 的形如 $f(x)\cdot\mathrm{d}x$ 近似表达式（其中 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的一个连续函数在点 x 处的值，$\mathrm{d}x$ 为小区间的长度)，那么就把 $f(x)\cdot\mathrm{d}x$ 称为量 U 的**元素**并记做 $\mathrm{d}U$ ，即

$$dU=f(x)dx$$

以量 U 的元素作为被积表达式在 $[a,b]$ 上进行积分，就得到所求量 U 的积分表达式：

$$\int_a^b f(x)dx$$

例如求由两条曲线 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$ （其中 $f_1,f_2\in C[a,b]$）及直线 $x=a, x=b$ 所为成图形的面积 A. 容易看出面积元素 $DA=|f_1(x)-f_2(x)|dx$ 于是得平面图形 $f_1(x)\le y\le f_2(x), a\le x\le b$ 的面积为

$$A=\int_a^b |f_1(x)-f_2(x)|dx$$

采用微元法应注意一下两点：

1）所求量U 关于分布区间 $[a,b]$ 具有代数可加性.

2）$\Delta U - f(x)\Delta x = o(\Delta x)$

对于前面所讲过的平面图形的面积、立体体积、曲线弧长相应的微元分别为：

$$\Delta S \approx |y|\Delta x$$
$$\Delta V \approx S(x)\Delta x$$
$$\Delta s \approx \sqrt{1+y'^2}\Delta x$$

二　旋转体的侧面积

设 y＝y(x)于[a,b]上非负，且连续可微，该曲线绕 x 轴旋转后所得的旋转面的侧面积：

$$S = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}dx$$

例 1、　计算圆 $x^2+y^2=R^2$ 在 $[x_1,x_2]\subset[-R,R]$ 上的弧段绕 x 轴旋转后所得的旋转面的侧面积.

例 2、　计算由内摆线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 绕 x 轴旋转后所得的旋转面的侧面积.

作业：P255　1（2）（3），　3（2）

§5　定积分在物理中的某些应用

教学目的：熟练掌握微元法解决问题的思路和方法，了解其在物理上的应用。

教学要求：掌握运用定积分计算液体压力、作功、静力矩与重心等物理问题的方法，并探求这些问题内在的和相互之间的联系.

教学重点：微元法解决问题的思路和方法

教学难点：在物理上的应用

质量问题

有一根不均匀的细棒，长为 b-a,密度为ρ，则棒的质量为 M=$\int_a^b \rho(x)dx$

质心（重心）问题

重心在计算不少实际问题中遇到，例如造船时就要考虑怎样来设计才使船的重心低一些。从最简单的两个质点的系统说起。设质点M_1，M_2的质量分别为m_1，m_2，想像它们为一细杆所连接，这时若重心在点 C，则 C 点用一物支起来，杆是平衡的。这不难理解。为计算重心，不妨把杆放在 x 轴上，设M_1，M_2和 C 点坐标依次为x_1，x_2，x_C，在 C 点所用支起的力应等于作用在M_1，M_2处的重力m_1g，m_2g 的和m_1g+m_2g。

因此它们为原点 0 的力矩之和应为 0，即 $m_1 g\ x_1 + m_2 g\ x_2 - (m_1 g + m_2 g)x_C = 0$，所以 $x_C = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

如果不是两个原点，而是有限多个 M_1，M_2，…，M_n，质量分别为 m_1，m_2，…，m_n，横坐标分别为 x_1，x_2，…，x_n 则重心 $x_C = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \cdots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$。

如果原点不是放在 X 轴上，而是在平面上，并设坐标为 $M_i(x_i, y_i)$，原量分别为 m_i，则该重心为（x_C, y_C），有以下公式：

$$x_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i},\quad y_C = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} m_i}$$

下面将此概念加以推广，来计算一般平面曲线（弧）的原心：

设曲线方程为 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$（$\alpha \le t \le \beta$），$x'(t)$，$y'(t)$ 存在且 $x'^2(t) + y'^2(t) \ne 0$（设原心为均匀分布，即密度为常数 ρ，这时重心由圆形的形状完全决定，所以均匀物体的质心也叫形心）。

曲线 l 的重心坐标（x_C, y_C）有近似公式：$x_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \rho \Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho \Delta s_i}$，$y_C = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \rho \Delta s_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho \Delta s_i}$

记 $\|p\| = \max\{\Delta s_1, \Delta s_2, \cdots, \Delta s_n\}$，则 $\|p\| \to 0$ 时，$\overline{x} = \dfrac{\int_l x ds}{\int_l ds}$，$\overline{y} = \dfrac{\int_l y ds}{\int_l ds}$。具体地，如果曲线方程段为 $y = f(x)$，（$a \le x \le b$），$f'(x)$ 在[a, b]连续，则此曲线段的质心坐标为

$$\overline{x} = \frac{\int_l x ds}{S} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{S},\quad \overline{y} = \frac{\int_l y ds}{S} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\, dx}{S}$$

其中 $S = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\, dx$ 为曲线段的弧长。如果密度不是常数，而是 x 的连续函数 $\rho = \rho(x)$，（$a \le x \le b$）那么完全类似地可得曲线段质心坐标为：

$$\overline{x} = \frac{\int_l x\rho(x) ds}{\int_l \rho(x) ds} = \frac{\int_l x dm}{m},\quad \overline{y} = \frac{\int_l y\rho(x) ds}{\int_l \rho(x) ds} = \frac{\int_l y dm}{m}$$

其中 $dm = \rho(x) ds$，$m = \int_a^b \rho(x) ds$ 为曲线段的质量。

例：求以 r 为半径的半圆弧的形心。

变力作功

由于功具有可加性,故只要寻找到功的微元,再于直线区间上作积分即可.

作业:1,3,6

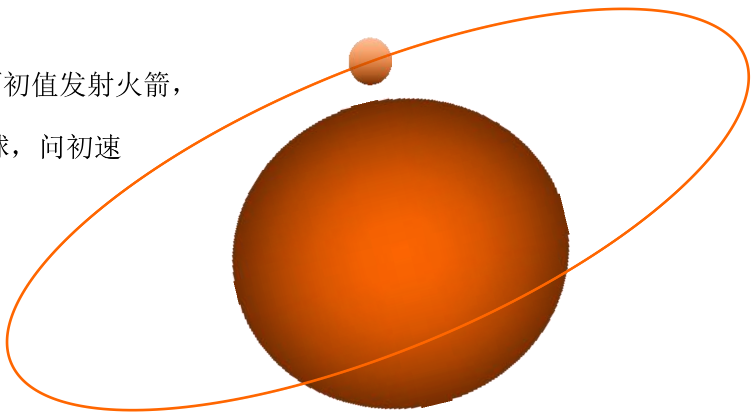
第十一章　反常积分

§1　反常积分的概念

教学目的：掌握反常积分的定义和计算方法.
教学要求：掌握无穷积分与瑕积分的定义与计算方法.
教学重点：无穷积分与瑕积分的定义与计算方法.
教学难点：讲清反常积分是变限积分的极限.
教学方法：系统讲授法.
教学程序：

一　问题的提出

例 1（第二宇宙速度问题）在地球表面初值发射火箭，要是火箭克服地球引力，无限远离地球，问初速度至少多大？



解　设地球半径为 R，火箭质量为 m 地面重力加速度为 g，有万有引力定理，在距地心 x 处火箭受到的引理为

$$F(x)=\frac{mgR^2}{x^2}$$

于是火箭上升到距地心 r 处需要做到功为

$$\int_R^r \frac{mgR^2}{x^2}dx = mgR^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)$$

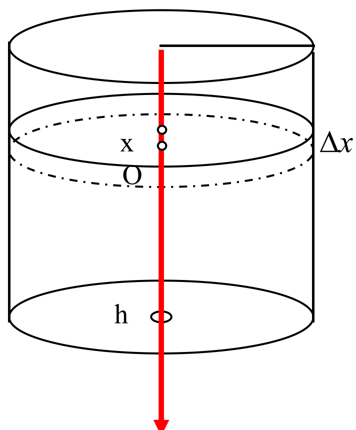
当 $r\to\infty$ 时，其极限就是火箭无限远离地球需要作的功

$$\int_R^\infty \frac{mgR^2}{x^2}dx=\lim_{r\to\infty}\int_R^r\frac{mgR^2}{x^2}dx=mgR$$

再由能量守恒定律，可求得处速度 v_0 至少应使

$$\frac{1}{2}mv_0^2=mgR \quad\Rightarrow\quad v_0=\sqrt{2gR}\approx 11.2(km/s)$$

例 2 从盛满水开始打开小孔，问需多长时间才能把桶里水全部放完？



解 由物理学知识知道，（在不计摩擦情况下），桶里水位高度为 $h-x$ 时，水从小

孔里流出的速度为

$$v=\sqrt{2g(h-x)}$$

设在很短一段时间 Δt 内，桶里水面降低的

高度为 Δx，则有下面关系：

$$\pi R^2\Delta x = v\pi r^2\Delta t$$

由此得 $\Delta t=\dfrac{R^2}{r^2\sqrt{2g(h-x)}}\Delta x$， $x\in[0,h]$

所以流完一桶水所需的时间应为

$$t_f=\int_0^h\frac{R^2}{r^2(2g(h-x)}dx$$

但是，被积函数在 $(0,h]$ 上是无界函数，，所一我们取

$$t_f=\lim_{u\to h^-}\int_0^u\frac{R^2}{r^2(2g(h-x)}dx$$

$$=\lim_{u\to h^-}\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{R^2}{r^2}(\sqrt{h}-\sqrt{h-u})=\sqrt{\frac{2h}{g}}\frac{R^2}{r^2}$$

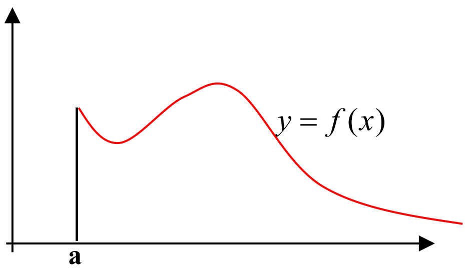
相对于以前学习的定积分（正常积分），我们把这里的积分叫做反常积分.

二 两类反常积分的定义

无穷限反常积分的定义

$$F(A)=\int_a^A \quad , \quad \int_a^{+\infty}f=F(+\infty)-F(a).$$

无穷限反常积分几何意义



例 1 (1) 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ ， $\displaystyle\int_{-\infty}^0\frac{dx}{1+x^2}$ ， $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$ 的敛散性 .

(2) 计算积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$.

例 2 讨论以下积分的敛散性 ：

(1) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$； (2) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^p}$.

例 3 讨论积分 $\int_a^{+\infty}\cos xdx$ 的敛散性 .

二. 瑕积分：（先介绍函数的瑕点）

1. 瑕积分的定义： 以点 b 为瑕点给出定义. 然后就点 a 为瑕点、点 $c\in(a,b)$ 为瑕点以及有多个瑕点的情况给出说明.

例 9 判断积分 $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ 的敛散性 .

例 10 讨论瑕积分 $\int_0^1\frac{dx}{x^q}$ ($q>0$) 的敛散性 ， 并讨论积分 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 的敛散性 .

2. 瑕积分与无穷积分的关系：

设函数 $f(x)$ 连续 ， b 为瑕点. 有

$$\int_a^b f(x)dx \overset{t=\frac{1}{b-x}}{=\!=\!=\!=\!=} \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{t^2}dt\,,$$

3. 把瑕积分化成了无穷积分；

设 $a>0$，有 $\int_a^{+\infty}g(x)dx \overset{t=\frac{1}{x}}{=\!=\!=\!=} -\int_{\frac{1}{a}}^{0}g\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}=\int_0^{\frac{1}{a}}g\left(\frac{1}{t}\right)\frac{dt}{t^2}$,

把无穷积分化成了瑕积分.

可见 ， 瑕积分与无穷积分可以互化 . 因此 ， 它们有平行的理论和结果 .

例 11 证明瑕积分 $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}dx$ 当 $\alpha<2$ 时收敛.

证明 $\int_0^1 \overset{x=\frac{1}{t}}{=\!=\!=\!=} \int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{2-\alpha}}dt$， 由例 6 ， 该积分当 $\alpha<2$ 时收敛.

作业：P269 1(2)(4)(6)(8)， 2(1)(3)(5)(7)

§2 无穷积分的性质与收敛判别

教学目的：掌握无穷积分的性质与收敛判别准则.

教学要求：(1) 基本要求：掌握无穷积分与瑕积分的定义，会用柯西判别法判别无穷积分与瑕积分的敛散性.
(2) 较高要求：掌握狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

教学重点： 掌握判别无穷积分与瑕积分收敛的方法.
教学难点： 用狄利克雷判别法或阿贝尔判别法判别无穷积分与瑕积分的敛散性.
教学方法： 讲练结合.
教学程序：

一 无穷积分的性质：

⑴ $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积， k — Const ， 则函数 $k\ f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积， 且

$$\int_a^{+\infty} kf(x)dx = k\int_a^{+\infty} f(x)dx .$$

⑵ $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积， $\Rightarrow$ $f(x)\pm g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积， 且

$$\int_a^{+\infty}(f\pm g) = \int_a^{+\infty} f \pm \int_a^{+\infty} g .$$

⑶ 无穷积分收敛的 *Cauchy* 准则：（ 翻译 $F(A)\to B,\quad A\to+\infty.$）

定理： 无穷 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists A,\ \forall A',A''>A,\ \Rightarrow \left|\int_{A'}^{A''} f(x)dx\right|<\varepsilon .$

⑷ 绝对收敛与条件收敛：定义概念.

绝对收敛 $\Rightarrow$ 收敛，（ 证 ） 但反之不真. 绝对型积分与非绝对型积分 .

二 无穷积分判敛法：

非负函数无穷积分判敛法：对非负函数，有 $F(A)\nearrow$. 非负函数无穷积分敛散性记法.

⑴ 比较判别法： 设在区间 $[a,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 非负且 $f(x)\le g(x)$， 又对任何 $A>a$，

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,A]$ 上可积 . 则

$$\int_a^{+\infty} g < +\infty,\ \Rightarrow \int_a^{+\infty} f < +\infty;\quad \int_a^{+\infty} f = +\infty,\ \Rightarrow \int_a^{+\infty} g = +\infty. \quad （证）$$

例 4 判断积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(1+x^2)}{5+x^2}dx$ 的敛散性.

比较原则的极限形式 ： 设在区间 $[a,+\infty)$ 上函数 $g>0$， $f\ge 0$， $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f}{g}=c$.

则

i﹥ $0<c<+\infty$， $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} f$ 与 $\int_a^{+\infty} g$ 共敛散 ；

ii﹥ $c=0$， $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g < +\infty$ 时， $\int_a^{+\infty} f < +\infty$；

iii> $c=+\infty$, $\Rightarrow$ $\int_a^{+\infty} g = +\infty$ 时, $\int_a^{+\infty} f = +\infty$. （证）

(2) Cauchy 判敛法:

（以 $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ 为比较对象，即取 $g(x)=\frac{1}{x^p}$. 以下 $a>0$）

设对任何 $A>a$, $f(x)\in C[a,A]$, $0\le f(x)\le\frac{1}{x^p}$ 且 $p>1$,

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f < +\infty$;

若 $f(x)\ge\frac{1}{x^p}$ 且 $p\le 1$, $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f = +\infty$.

Cauchy 判敛法的极限形式 ： 设 $f(x)$ 是在任何有限区间 $[a,A]$ 上可积的正值函数，且

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p f(x)=\lambda$. 则

i> $p>1$, $0\le\lambda<+\infty$, $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f < +\infty$;

ii> $p\le 1$, $0<\lambda\le+\infty$, $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f = +\infty$. （证）

例 5 讨论以下无穷积分的敛散性 ：

i> $\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}dx$, $(\alpha>0)$; ii> $\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}dx.$

(3) 其他判敛法:

Abel 判敛法: 若 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可积， $g(x)$ 单调有界， 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

Dirichlet 判敛法: 设 $F(A)=\int_a^A f$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界， $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且当 $x\to+\infty$ 时, $g(x)\to 0$. 则积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 收敛.

例 6 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}dx$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx$ $(p>0)$ 的敛散性.

例 7 证明下列无穷积分收敛 ，且为条件收敛 ：

$$\int_1^{+\infty}\sin x^2dx,\qquad \int_1^{+\infty}\cos x^2dx,\qquad \int_1^{+\infty}x\sin x^4dx.$$

例 8 （ 乘积不可积的例 ） 设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$， $x\in[1,+\infty)$． 由例 6 的结果，积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛 ．

但积分 $\int_1^{+\infty} f(x)f(x)dx=\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin^2 x}{x}dx$ 却发散.（ 参阅例 6 ）

作业：P275 2， 3， 4(3)(4)(5)(6)， 5(1)(4)

§3 瑕积分的性质与收敛判别:

教学目的：掌握瑕积分的性质与收敛判别法则.
教学要求：使学生理解并掌握瑕积分的性质与收敛判别法则.
教学重点：瑕积分的收敛判别法则.
教学难点：瑕积分的收敛判别法则.
教学方法：讲练结合.
教学程序：

一 瑕积分的性质

定理：（瑕积分收敛的充要条件）

性质 1

性质 2

性质 3

二 瑕积分绝对收敛的的比较法则

定理： （ 比较法则 ）

推论 1 （ *Cauchy* 判别法 ）

推论 2 （ *Cauchy* 判别法的极限形式 ）

例 12 判别下列瑕积分的敛散性 ：

(1) $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$, （ 注意被积函数非正 ）. (2) $\int_1^2 \dfrac{\sqrt{x}}{\ln x}dx$.

例 13 讨论非正常积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^{\alpha-1}}{1+x}dx$ 的敛散性.

作业：P279 3（2）（3）（4）（8）

第十二章 数 项 级 数

§1 级数的收敛性

教学目的：掌握数项级数收敛性的定义和收敛级数的性质.
教学要求：深刻理解数项级数收敛的定义及与数列收敛的关系.
教学重点：握数项级数收敛性的定义和基本性质；等比级数与调和级数的敛散性.
教学难点：应用柯西收敛准则判别级数的敛散性.

教学方法：以讲授为主．

教学程序：

1． 数项级数的概念

在初等数学中，我们知道：任意有限个实数$u_1,u_2,\cdots,u_n$相加，其结果仍是一个实数，在本章将讨论——无限多个实数相加——级数——所可能出现的情形及特征．如

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$ 从直观上可知，其和为 1．

又如， $1+(-1)+1+(-1)+\cdots$． 其和无意义；

若将其改写为： $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ 则其和为：0；

若写为： $1+[(-1)+1]+[(-1)+1]+\cdots$ 则和为：1．

问题：无限多个实数相加是否存在和；

如果存在，和等于什么．

定义 1 给定一个数列$\{u_n\}$，将它的各项依次用加号"+"连接起来的表达式

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

称为**数项级数**或**无穷级数**（简称**级数**），其中u_n称为级数（1）的**通项**．

级数（1）简记为：$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，或 $\sum u_n$．

2． 级数的收敛性

记 $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+\cdots+u_n$

称之为级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的第 n 个部分和，简称部分和．

定义 2 若数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛于 S（即$\lim_{n\to\infty}S_n=S$），则称数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，称 S 为数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和，记作

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots.$$

若部分和数列$\{S_n\}$发散，则称数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

例 1 试讨论等比级数（几何级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots, \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解：见 P2.

例 2　讨论级数

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的收敛性.

解：见 P2.

3.　收敛级数的性质

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的敛散性是由它的部分和数列 $\{S_n\}$ 来确定的，因而也可以认为数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是数列 $\{S_n\}$ 的另一表现形式．反之，对于任意的数列 $\{a_n\}$，总可视其为数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots$$

的部分和数列，此时数列 $\{a_n\}$ 与级数 $a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + \cdots$ 有相同的敛散性，因此，有

定理 1（级数收敛的 Cauchy 准则）级数(1)收敛的充要条件是：任给正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $m > N$ 以及对任意的正整数 p，都有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots + u_{m+p} \right| < \varepsilon \ .$$

注：级数（1）发散的充要条件是：存在某个 $\varepsilon_0 > 0$，对任何正整数 N，总存在正整数 $m_0 (> N), p_0$，有

$$\left| u_{m_0+1} + u_{m_0+2} + \cdots + u_{m_0+p_0} \right| \geq \varepsilon_0 \ .$$

推论　（必要条件）　若级数（1）收敛，则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0\ .$$

注：此条件只是必要的，并非充分的，如下面的例 3.

例 3　讨论调和级数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

的敛散性.

解：显然，有　$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，但当令　$p = m$ 时，有

$$\left| u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \cdots + u_{2m} \right| = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

$$\geq \frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\frac{1}{2m}+\cdots+\frac{1}{2m}=\frac{1}{2}.$$

因此，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任何正整数 N，只要 $m>N$ 和 $p=m$ 就有

$$\left|u_{m_0+1}+u_{m_0+2}+\cdots+u_{m_0+p_0}\right|\geq\varepsilon_0,$$

故调和级数发散.

例 4　应用级数收敛的柯西准则证明级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

证明：由于

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|=\frac{1}{(m+1)^2}+\frac{1}{(m+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(m+p)^2}$$

$$<\frac{1}{m(m+1)}+\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\cdots+\frac{1}{m+p-1)(m+p)}=\frac{1}{m}-\frac{1}{m+p}<\frac{1}{m}.$$

故对 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]$，使当 $m>N$ 及对任何正整数 p，都有

$$\left|u_{m+1}+u_{m+2}+\cdots+u_{m+p}\right|<\frac{1}{m}<\varepsilon.$$

故级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 收敛.

定理 2　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 都有收敛，则对任意常数 c,d，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)$ 也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(cu_n+dv_n)=c\sum_{n=1}^{\infty}u_n+d\sum_{n=1}^{\infty}v_n.$$

即对于收敛级数来说，交换律和结合律成立.

定理 3　去掉、增加或改变级数的有限个项并不改变级数的敛散性.

（即级数的敛散性与级数的有限个项无关，但其和是要改变的）.

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，设其和为 S，则级数　$u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots$　也收敛，且其和为

$R_n=S-S_n$. 并称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的第 n 个余项（简称余项），它代表用 S_n 代替 S 时所产生的误差.

定理 4　在收敛级数的项中任意加括号，既不改变级数的收敛性，也不改变它的和.

注意：从级数加括号后的收敛，不能推断加括号前的级数也收敛（即去括号法则不成立）.

如：$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots+0+\cdots$

收敛，而级数

$$1-1+1-1+\cdots$$

是发散的.

作业：P5　1，　2，　5

§2　正 项 级 数

教学目的：掌握判别正项级数敛散性的各种方法，包括比较判别法，比式判别法，根式判别法和积分判别法．

教学要求：掌握比较判别法，比式判别法，根式判别法和积分判别法．

教学重点：比较判别法，比值判别法，根式判别法，积分判别法，．

教学难点：比较判别法，比值判别法．

教学方法：以讲授为主．

教学程序：

一 正项级数收敛性的一般判别原则

若级数各项的符号都相同，则称为同号级数．而对于同号级数，只须研究各项都由正数组成的级数——正项级数．因负项级数同正项级数仅相差一个负号，而这并不影响其收敛性．

定理 12-2-1 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛$\Leftrightarrow$部分和数列$\{S_n\}$有界．

证明：由于对$\forall n$，$u_n>0$，故$\{S_n\}$是递增的，因此，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} \Leftrightarrow \{S_n\}\text{收敛} \Leftrightarrow \{S_n\}\text{有界}.$$

定理 12-2-2（比较原则） 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均为正项级数，如果存在某个正数 N，使得对

$\forall n>N$都有

$$u_n\le v_n,$$

则 （1）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

（2）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散．

证明：由定义及定理 12-2-1 即可得．

例 1 考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$的收敛性．

解：由于当$n\ge 2$时，有

$$\frac{1}{n^2-n+1}\le\frac{1}{n^2-n}=\frac{1}{n(n-1)}\le\frac{1}{(n-1)^2},$$

因正项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(n-1)^2}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-n+1}$收敛．

推论（比较判别法的极限形式） 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数，若

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l,$$

则 （1） 当$0<l<+\infty$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同时收敛或同时发散；

（2）当$l=0$且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

（3）当$l=+\infty$且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散.

证明：由比较原则即可得.

例 2 讨论级数 $\sum\frac{1}{2^n-n}$ 的收敛性.

解：利用级数$\sum\frac{1}{2^n}$的收敛性，由推论可知级数$\sum\frac{1}{2^n-n}$收敛.

例 3 由级数$\sum\frac{1}{n}$的发散性，可知级数$\sum\sin\frac{1}{n}$是发散的.

二 比式判别法和根式判别法

定理 12-2-3 （达朗贝尔判别法，或称比式判别法）设$\sum u_n$为正项级数，且存在某个正整数N_0及常数$q\in(0,1)$：

（1） 若对$\forall n>N_0$，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q$，则级数$\sum u_n$收敛；

（2） 若对$\forall n>N_0$，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\ge 1$，则级数$\sum u_n$发散.

证明：（1）不妨设对一切n，有$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le q$成立，于是，有

$$\frac{u_2}{u_1}\le q,\ \frac{u_3}{u_2}\le q,\cdots,\ \frac{u_n}{u_{n-1}}\le q,\cdots.$$

故 $\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{u_3}{u_2}\cdot\cdots\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\le q^{n-1}$， 即 $u_n\le u_1q^{n-1}$，由于，当$q\in(0,1)$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n-1}$收敛，由比较原则，可知级数$\sum u_n$收敛.

(2) 因此时$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\ne 0$，故级数$\sum u_n$发散.

推论（比式判别法的极限形式）　设$\sum u_n$为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q,$$

则（1）当$q<1$时，级数$\sum u_n$收敛；

（2）　当$q>1$（可为$+\infty$）时，级数$\sum u_n$发散；

（3）　当$q=1$时，级数$\sum u_n$可能收敛，也可能发散．如：$\sum\frac{1}{n}$，$\sum\frac{1}{n^2}$．

证明：由比式判别法和极限定义即可得．

例 4 讨论级数

$$\frac{2}{1}+\frac{2\cdot5}{1\cdot5}+\frac{2\cdot5\cdot8}{1\cdot5\cdot9}+\cdots+\frac{2\cdot5\cdot8\cdots[2+3(n-1)]}{1\cdot5\cdot9\cdots[1+4(n-1)]}+\cdots$$

的收敛性．

例 5　讨论级数$\sum nx^{n-1}(x>0)$的收敛性．

定理 12-2-4（柯西判别法，或称根式判别法）　设$\sum u_n$为正项级数，且存在某个正整数N_0及正常数l，

（1）若对$\forall n>N_0$，有　$\sqrt[n]{u_n}\le l<1$，　则级数$\sum u_n$收敛；

（2）若对$\forall n>N_0$，有　$\sqrt[n]{u_n}\ge 1$，　则级数$\sum u_n$发散．

证明：由比较判别法即可得．

推论（根式判别法的极限形式）设$\sum u_n$为正项级数，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

则　（1）当$l<1$时，级数$\sum u_n$收敛；

（2）当$l>1$（可为$+\infty$）时，级数$\sum u_n$发散；

（3）当$q=1$时，级数$\sum u_n$可能收敛，也可能发散．如：$\sum\frac{1}{n}$，$\sum\frac{1}{n^2}$．

例 6 讨论级数　$\sum\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性．

解：由上推论即得．

说明：因　$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=q\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=q$　这就说明凡能用比式判别法判定收敛性的级数，也能用根式判别法来判断，即根式判别法较之比式判别法更有效．但反之不能，如例 6．

三　积分判别法

特点：积分判别法是利用非负函数的单调性和积分性质，并以反常积分为比较对象来判断正项级数的敛散性．

定理 12-9　设 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数，则正项级数 $\sum f(n)$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 同时收敛或同时发散．

证明：由假设 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数，则对任何正数 A，$f(x)$ 在 $[1，A]$ 上可积，从而有

$$f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(x)dx \le f(n-1)，\quad n = 2,3,\cdots$$

依次相加，得

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \le \int_1^m f(x)dx \le \sum_{n=2}^{m} f(n-1) = \sum_{n=1}^{m-1} f(n)$$

若反常积分收敛，则对 $\forall m$，有

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} f(n) \le f(1) + \int_1^m f(x)dx \le f(1) + \int_1^{+\infty} f(x)dx .$$

于是，知　级数　$\sum f(n)$ 收敛．

反之，若级数 $\sum f(n)$ 收敛，则对任意正整数 $m(>1)$，有

$$\int_1^m f(x)dx \le S_{m-1} = \sum_{n=1}^{m-1} f(n) \le \sum f(n) = S .$$

又因 $f(x)$ 为 $[1,+\infty)$ 上非负减函数，故对任何 $A > 1$，有

$$0 \le \int_1^A f(x)dx \le S_n < S，\quad n \le A \le n+1 .$$

故知，反常积分 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛．

同理可证它们同时发散．

例 7　讨论下列级数

（1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$，（2）$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$，（3）$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^p}$

的敛散性．

作业：P16　1，　2（2）（4）（6）,3，　5，　9

§3　一般 项 级 数

教学目的： 掌握交错级数的莱布尼茨判别法，一般项级数的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法．

教学要求：（1）理解收敛级数，绝对收敛级数与条件收敛级数的关系，性质及证明方法．掌握交错级数的莱布尼茨判别法．

（2）掌握一般项级数的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法，了解绝对收敛级数的性质．

教学重点： 交错级数的莱布尼茨判别法，条件收敛和绝对收敛的定义．

教学难点： 一般项级数的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法．

教学方法： 以讲授为主．

教学程序：

一　交错级数

若级数的各项符号正负相间，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\ ,\quad (u_n>0,\forall n)$$

称为交错级数.

定理 12-3-1（莱布尼茨判别法）　若交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$满足下述两个条件：

（1）　数列$\{u_n\}$单调递减；　　（2）$\lim_{n\to\infty}u_n=0$.

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛. 且此时有$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\right|\le u_1$.

证明：因　$S_{2m-1}=u_1-(u_2-u_3)-\cdots-(u_{2m-2}-u_{2m-1})\le u_1$是递减的；

而　$S_{2m}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\cdots+(u_{2m-1}-u_{2m})$是递增的. 又

$0<S_{2m-1}-S_{2m}=u_{2m}\to 0\ (m\to\infty)$，从而$\{[S_{2m},S_{2m-1}]\}$是一个闭区间套，故由闭区间套定理知，存在唯一的一个数 S，使

$$\lim_{m\to\infty}S_{2m-1}=\lim_{m\to\infty}S_{2m}=S\ ,$$

故数列$\{S_n\}$收敛，即级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$收敛.

至于不等式$\left|\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n\right|\le u_1$由　$S_{2m-1}\le u_1$即可得.

推论　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$满足莱布尼茨判别法的条件，则其余项估计式为

$$|R_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}u_k\right|\le u_{n+1}\ .$$

例：判别下列级数的收敛性：（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$；

（3）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}$.

二　绝对收敛级数及其性质

若级数$\sum u_n$各项绝对值所组成的级数$\sum|u_n|$收敛，则称原级数$\sum u_n$绝对收敛.

定理 12-3-2　　绝对收敛的级数一定收敛.

证明：由绝对收敛的定义及级数收敛的柯西准则即可得.

说明：对于级数是否绝对收敛，可用正项级数的各判别法进行判别.

例 1　对任何实数α，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}$是绝对收敛的.

若级数$\sum u_n$ 收敛，但级数$\sum|u_n|$发散，则称级数$\sum u_n$ 条件收敛.

如：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$是条件收敛的；$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)!}$和$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{10^n}$是绝对收敛的.

全体收敛的级数可分为绝对收敛级数和条件收敛级数两大类.

绝对收敛的级数有以下性质：

1．级数的重排

定理 12-3-3　设级数$\sum u_n$ 绝对收敛，且其和等于 S，则任意重排后所得到的级数也绝对收敛，且其和也不变.

注意：（1）由条件收敛的级数重排后所得到的级数，不一定收敛；即使收敛，也不一定收敛于原来的和数.

（2）条件收敛的级数适当重排后，可得到发散级数，或收敛于事先指定的任何数.

如：设　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots=A$，

则　$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots=\frac{A}{2}$，

而　$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots=\frac{3A}{2}$，

它正是第 1 个级数的重排.

2．级数的乘积

设有收敛级数

$$\sum u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=A, \tag{1}$$

$$\sum v_n=v_1+v_2+\cdots+v_n+\cdots=B. \tag{2}$$

它们每一项所有可能的乘积为：

$$\begin{matrix} u_1v_1 & u_1v_2 & u_1v_3 & \cdots & u_1v_n & \cdots \\ u_2v_1 & u_2v_2 & u_2v_3 & \cdots & u_2v_n & \cdots \\ u_3v_1 & u_3v_2 & u_3v_3 & \cdots & u_3v_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_nv_1 & u_nv_2 & u_nv_3 & \cdots & u_nv_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \tag{3}$$

定理 12-3-4（柯西定理） 若级数（1）、（2）都绝对收敛，则对（3）中所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺序排列所得到的级数 $\sum w_n$ 也绝对收敛，且和等于 AB.

例 2 等比级数

$$\frac{1}{1-r}=1+r+r^2+\cdots+r^n+\cdots, \qquad |r|<1$$

是绝对收敛的，将 $(\sum r^n)^2$ 按（15）的顺序排列．则得到

$$\frac{1}{(1-r)^2}=1+(r+r)+(r^2+r^2+r^2)+\cdots+\underbrace{(r^n+\cdots+r^n)}_{n+1\text{个}}+\cdots$$

$$=1+2r+3r^2+\cdots+(n+1)r^n+\cdots \ .$$

注：（3）中所有乘积 $u_i v_j$ 可以按各种方法排成不同的级数，常用的有按正方形顺序：

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_2+u_2v_1+u_2v_3+u_2v_3+u_3v_3+u_3v_2+u_3v_1+\cdots;$$

或对角线顺序：

$$u_1v_1+u_1v_2+u_2v_1+u_1v_3+u_2v_2+u_3v_1+\cdots.$$

三 阿贝耳判别法和狄利克雷判别法

本段介绍两个判别一般项级数收敛性的方法，先引进一个公式：

引理（分部求和公式，也称阿贝尔变换） 设 ε_i， v_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 为两组实数，若令

$$\sigma_k=v_1+v_2+\cdots+v_k, \qquad (k=1,2,\cdots,n)$$

则有下列求和公式成立：

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i v_i=(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\sigma_1+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)\sigma_2+\cdots+(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)\sigma_{n-1}+\varepsilon_n\sigma_n \ .$$

证明：直接计算可得.

推论（阿贝尔引理） 若（1） $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 单调数组；

（2）对任一正整数 $k(1\le k\le n)$ 有 $|\sigma_k|=|v_1+v_2+\cdots+v_k|\le A$，记

$\varepsilon=\max\limits_{k}\{|\varepsilon_k|\}$，则有

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k v_k\right|\le 3\varepsilon A \ .$$

证明：由阿贝尔引理即可得.

定理 12-3-5 （阿贝尔判别法）若 $\{a_n\}$ 为单调有界数列，且级数 $\sum b_n$ 收敛，则级数

$$\sum a_n b_n=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n+\cdots$$

收敛.

证明：由阿贝尔引理及柯西准则即可得.

如：由此判别法可知，当级数 $\sum u_n$ 收敛时，级数

$$\sum \frac{u_n}{n^p}(p>0), \qquad \sum \frac{u_n}{\sqrt{n+1}}$$

收敛.

定理 12-3-6（狄利克雷判别法）若 $\{a_n\}$ 为单调递减数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，又级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界，则级数

$$\sum a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots$$

收敛.

证明：同定理 12-3-5.

例 3　若数列 $\{a_n\}$ 为单调递减，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，则级数

$$\sum a_n \sin nx, \quad \sum a_n \cos nx$$

对任何 $x \in (0,2\pi)$ 都收敛.

解：由狄利克雷判别法即得.

作业：P24　1（4）（5）（6）（7）（8），　2（2）（3），　3

第十三章　函数列与函数项级数

§1　一致收敛性

教学目的：掌握函数序列与函数项级数一致收敛性的定义，函数序列与函数项级数一致收敛性判别的柯西准则，函数项级数一致收敛性的魏尔斯特拉斯判别法.

教学要求：掌握函数序列与函数项级数一致收敛性的定义，函数序列与函数项级数一致收敛性判别的柯西准则，函数项级数一致收敛性的魏尔斯特拉斯判别法.

教学重点：函数序列与函数项级数一致收敛性判别的柯西准则.

教学难点：狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

教学方法：讲练结合.

教学程序：

一　函数列及其一致收敛性.

设

$$f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots \qquad (1)$$

是一列定义在同一数集 E 上的函数，称为定义在 E 上的函数列. 也可简记为：

$$\{f_n\} 或 \quad f_n, \quad n=1,2,\cdots.$$

设 $x_0 \in E$，将 x_0 代入 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 得到数列：

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \cdots, f_n(x_0), \cdots \qquad (2)$$

若数列（2）收敛，则称函数列（1）在点 x_0 收敛，x_0 称为函数列（1）的收敛点．若数列（2）发散，则称函数列（1）在点 x_0 发散．则称函数列（1）在数集 $D \subset E$ 上每一点都收敛，则称（1）在数集 D 上收敛．这时 $\forall x \in D$，都有数列 $\{f_n(x)\}$ 的一个极限值与之对应，由这个对应法则就确定了 D 上的一个函数，称它为函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数．记作 f．于是，有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D，或 \quad f_n(x) \to f(x)\ (n \to \infty), \quad x \in D.$$

函数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义 对每一个固定的 $x \in D$，对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N > 0$（注意：一般说来 N 值的确定与 ε 和 x 的值都有关），使得当 $n > N$ 时，总有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

使函数列 $\{f_n\}$ 收敛的全体收敛点的集合，称为函数列 $\{f_n\}$ 的收敛域．

例 1 设 $f_n(x) = x^n$，$n = 1,2,\cdots$ 为定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的函数列，证明它的收敛域是 $(-1,1]$，且有极限函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, |x| < 1 \\ 1, x = 1 \end{cases} \qquad (3)$$

证 任给 $\varepsilon > 0$（不妨设 $\varepsilon < 1$），当 $0 < |x| < 1$ 时，由于 $|f_n(x) - f(x)| = |x|^n$，故只要取 $N(\varepsilon, x) = \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}$，则当 $n > N(\varepsilon, x)$ 时，就有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$．而当 $x = 0$ 和 $x = 1$ 时，则对任何正整数 n，都有

$$|f_n(0) - f(0)| = 0 < \varepsilon, \quad |f_n(1) - f(1)| = 0 < \varepsilon.$$

这就证得 $\{f_n\}$ 在 $(-1,1]$ 上收敛，且有（3）式所表示的极限函数．

当 $|x| > 1$ 时，则有 $|x|^n \to +\infty (n \to \infty)$，当 $x = -1$ 时，对应的数列为 $-1,1,-1,1,\cdots$ 它显然是发散的．所以函数列 $\{x^n\}$ 在区间 $(-1,1]$ 外都是发散的．

例 2 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数列 $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$，$n = 1,2,\cdots$，由于对任何实数 x，都有 $\left|\dfrac{\sin nx}{n}\right| \le \dfrac{1}{n}$，故对任给的 $\varepsilon > 0$，只要 $n > N = \dfrac{1}{\varepsilon}$，就有 $\left|\dfrac{\sin nx}{n} - 0\right| < \varepsilon$．所以函数列 $\left\{\dfrac{\sin nx}{n}\right\}$ 的收敛域为无限区间 $(-\infty,+\infty)$，函数极限 $f(x) = 0$．

定义 1 设函数列 $\{f_n\}$ 与函数 f 定义在同一数集 D 上，若对任给的正数 ε，总存在某一正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对一切的 $x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

则称函数列$\{f_n\}$在D上一致收敛于f，记作：　$f_n(x)$　　　$f(x)$　$(n \to \infty)$，　$x \in D$.

定理 13-1（函数列一致收敛的柯西准则）　函数列$\{f_n\}$在数集D上一致收敛的充要条件是：对任给的正数ε，总存在正数N，使得当$n,m > N$时，对一切$x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

证 [必要性]　设$f_n(x)$　　　$f(x)$　$(n \to \infty)$，$x \in D$，即对任给$\varepsilon > 0$，存在正数N，使得当$n > N$时，对一切$x \in D$，都有

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

于是当$n,m > N$，由（5）就有

$$|f_n(x) - f_m(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

[充分性]　若条件(4)成立，由数列收敛的柯西准则，$\{f_n\}$在D上任一点都收敛，记其极限函数为$f(x)$，$x \in D$．现固定（4）式中的n，让$m \to \infty$，于是当$n > N$时，对一切$x \in D$都有$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$．由定义 1，$f_n(x)$　　　$f(x)$ $(n \to \infty)$，$x \in D$.

定理 13-2　　函数列$\{f_n\}$在区间D上一致收敛于f的充要条件是：

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0. \tag{6}$$

证 [必要性]　若$f_n(x)$　　　$f(x)$　$(n \to \infty)$，$x \in D$．则对任给的正数ε，存在不依赖与x的正整数N，当$n > N$时，有

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad x \in D.$$

由上确界的定义，亦有

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

则有　$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

[充分性] 由假设，对任给的$\varepsilon > 0$，存在正整数N,使得当$n > N$，有

$$\sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

因为对一切$x \in D$，总有$|f_n(x) - f(x)| \le \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)|$.

故由（7）式得　$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$．于是$\{f_n\}$在$D$上一致收敛于$f$.

例 3　定义在$[0,1]$上的函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}2n^2x,0\le x\le \dfrac{1}{2n}\\ 2n-2n^2x,\dfrac{1}{2n}<x\le\dfrac{1}{n}\\ 0,\dfrac{1}{n}<x\le 1\end{cases}\qquad n=1,2,\cdots \tag{8}$$

由于 $f_n(x)=0$，故 $f(0)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(0)=0$．当 $0<x\le 1$ 时，只要 $n>\dfrac{1}{x}$，就有 $f_n(x)=0$，故在 $(0,1]$ 上有 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$．于是函数列（8）在 $[0,1]$ 上的极限函数 $f(x)=0$，又由于

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=f_n(\frac{1}{2n})=n\to\infty\qquad(n\to\infty),$$

所以函数列（8）在[0，1]上不一致收敛．

二　函数项级数及其一致收敛性

设 $\{u_n(x)\}$ 是定义在数集 E 上的一个函数列，表达式

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots,\quad x\in E \tag{9}$$

称为定义在 E 上的函数项级数，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 或 $\sum u_n(x)$．称

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}u_k(x),\quad x\in E,\quad n=1,2,\cdots \tag{10}$$

为函数项级数（9）的**部分和函数列**.

若 $x_0\in E$，数项级数 $u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots$　　（11）

收敛，既部分和 $S_n(x_0)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x_0)$ 当 $n\to\infty$ 时极限存在，则称级数（9）在点 x_0 收敛，x_0 称为级数（9）的收敛点，若级数（11）发散，则称级数（9）在点 x_0 发散．若级数（9）在 E 某个子集 D 上每个点都收敛，则称级数（9）在点 D 上收敛，若 D 为级数（9）全体收敛点的集合，这时则城 D 为级数（9）的收敛域．级数（9）在 D 上每一点 x 与其所对应的数项级数（11）的和 $S(x)$ 构成一个定义在 D 上的函数，称为级数（9）的**和函数**，并写作

$$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots=S(x)\quad,\ x\in D,$$

即　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S(x)$，$x\in D$．

也就是说，函数项级数（9）的收敛性就是指它的部分和函数列（10）的收敛性．

例 4　定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数项级数（几何级数）

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \qquad (12)$$

的部分和函数为 $S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}$．故当 $|x|<1$ 时，

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{1-x}.$$

所以几何级数（12）在 $(-1,1)$ 内收敛于和函数 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$；当 $|x|\ge 1$ 时，几何级数是发散的.

定义 2（函数项级数一致收敛性定义）设 $\{S_n(x)\}$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列. 若 $\{S_n(x)\}$ 在数集 D 上一致收敛于函数 $S(x)$，则称函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上**一致收敛**于函数 $S(x)$，或称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

由于函数项级数的一致收敛性是由它的部分和函数列来决定的，因此有

定理 13-3（函数项级数一致收敛的柯西准则）函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛 $\Leftrightarrow$ 对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使得当 $n>N$ 时，对一切 $x\in D$ 和一切正整数 p，都有

$$|S_{n+p}(x)-S_n(x)|<\varepsilon,$$

即

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

特别地，当 $p=1$ 时，得到函数项级数收敛的必要条件：

推论 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛 于 0.

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=S(x)$，$x\in D$，称 $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ 为函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的**余项**.

定理 13-4 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ $\Leftrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|R_n(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S(x)-S_n(x)|=0.$$

例 5 讨论几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}r^n$ 在所给区间上的一致收敛性：（1） $[-a,a](0<a<1)$；（2） $(-1,1)$.

三 函数项级数的一致收敛性判别法

1．用定义；

2．柯西准则（定理 13-3）；

3．定理 13-4（必须已知和函数 $S(x)$ 才可用此判别法）;

4．定理 13-5（魏尔斯特拉斯判别法，也称 M 判别法或优级数判别法）

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 定义在数集 D 上，$\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ 为收敛的正项级数，若 $\forall x \in D$，有

$$|u_n(x)| \le M_n,\quad n = 1,2,\cdots,$$

则函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 D 上一致收敛.

注：（1）应用此判别法的关键是：从 $u_n(x)$ 出发找到所需的 M_n.

（2）由此判别法所得结果是**绝对一致收敛**的.

作业：P35　1（1）（3）（4）（5），　2，　4

§2　一致收敛函数列与函数项级数的性质

[教学目的] 理解定积分的必要条件和充要条件.

[**教学要求**] 掌握可积的必要条件明思路. 掌握可积准则、可积函数类.

[**教学重点**] 理解定积分的必要条件；可积准则，可积函数类.

[**教学难点**] 证明定积分的必要条件，可积函数类.

[**教学方法**] 系统讲解法.

[**教学程序**]

主要讨论函数列的连续性、可积性、可微性.

定理 13-2-1 设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上一致收敛于 $f(x)$，且对 $\forall n$，

$\lim_{x\to x_0} f_n(x) = a_n$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n$、$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 均存在，且相等，即

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty} f_n(x).$$（即在一致收敛的条件下两种极限可换序）

定理 13-9（连续性）若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $f(x)$，且对 $\forall n$，$f_n(x)$ 在 I 上连续，则 $f(x)$ 在 I 上也连续.

说明：若各项为连续函数的函数列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上其极限函数不连续，则此函数列

$\{f_n(x)\}$ 在区间 I 上不一致收敛. 如：$\{x^n\}$ 在 $(-1,1]$ 上.

定理 13-10（可积性）若函数列 $\{f_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，且每一项都连续，则

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

注 1：该定理指出：在一致收敛的条件下，极限运算与积分运算可以交换顺序；

注 2：一致收敛只是这两种运算换序的充分条件，而并非必要条件. 如下面的：

例 1 设函数

$$f_n(x)=\begin{cases}2n\alpha_n, 0\le x<\dfrac{1}{2n}\\ 2\alpha_n-2n\alpha_n x, \dfrac{1}{2n}\le x<\dfrac{1}{n}\\ 0, \dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases},\quad n=1,2,\cdots.$$

定理 13-11（可微性）设$\{f_n(x)\}$为定义在$[a,b]$上的函数列，若$x_0\in[a,b]$为$\{f_n(x)\}$的收敛点，$\{f_n(x)\}$的每一项在$[a,b]$上有连续的导数，且$\{f_n'(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，则

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty}f_n(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x).$$

注 1：在该定理的条件下可以证明$\{f_n(x)\}$在区间$[a,b]$上一致收敛；

注 2：该定理指出：在一致收敛的条件下，求导运算与极限运算可以交换顺序；

注 3：一致收敛只是这两种运算换序的充分条件，而并非必要条件.

下面讨论函数项级数的连续性，逐项求积与逐项求导的性质，它们都可由函数列的相应性质推出.

定理 13-12（连续性）若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛，且每一项$u_n(x)$都连续，则其和函数也在区间$[a,b]$上连续.

注：在一致收敛的条件下，求和运算与求极限运算可以交换顺序，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\lim_{x\to x_0}u_n(x))=\lim_{x\to x_0}(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)).$$

定理 13-13（逐项求积）若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛，且每一项$u_n(x)$都连续，则

$$\int_a^b(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x))dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)dx.$$

注：即在一致收敛的条件下，求（无限项）和运算与积分运算可以交换顺序.

定理 13-14（逐项求导）若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$[a,b]$上每一项$u_n(x)$都有连续导函数，$x_0\in[a,b]$为函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的收敛点，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在区间$[a,b]$上一致收敛，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{d}{dx}u_n(x))=\frac{d}{dx}(\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)).$$

注：即在一致收敛的条件下，求（无限项）和运算与求导运算可以交换顺序.

作业：P41　2，　4，　5，　8

第十四章　幂 级 数

§1　幂 级 数

教学目的：掌握幂级数收敛半径和收敛区间的定义与求法，掌握幂级数的性质和运算.

教学要求：会求幂级数的收敛半径和收敛范围.掌握幂级数收敛半径和收敛区间的定义与求法，学会解答有关幂级数收敛半径和收敛区间的习题.

教学重点：幂级数收敛半径和收敛区间.

教学难点：幂级数收敛半径和收敛区间.

教学方法：系统讲授法.

教学程序：

一　引言

前面介绍了一般的函数项级数，重点是函数项级数收敛、一致收敛的判定方法以及一致收敛函数项级数的性质. 从今天开始，我们将陆续向大家介绍两类特殊的常用的函数项级数，一类是“幂级数”（代数多项式的推广）；另一类是“Fourier 级数”（三角多项式的推广，三角级数的特例，在物理中有广泛的应用）.

二　什么样的函数项级数是幂级数

1　**定义（幂级数）**：形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots \tag{1}$$

的函数项级数称为幂级数.

2　**特例**：当 $x_0 = 0$，即在点零处展开的幂级数为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \tag{2}$$

3　若在（1）中令 $x - x_0 = t$，则（1）化为（2）的形式，故研究幂级数，一般研究在点零处的展开幂级数即可.

4　**幂级数形式上的特点**：一般项为 $a_n(x-x_0)^n$，从而所求的和是多项式（最简单函数），是一种比较简单的函数项级数，因而具有一些特殊的性质. 如收敛域一定是区间（退化区间——点）. 又在收敛域内可任意次逐项求导和求积等，这些优点使其成为一类最常用的级数.

三　幂级数的收敛区间

定理 14.1 （ Abel 定理 ） 若幂级数 $\sum a_n x^n$ 在点 $x = \bar{x} \neq 0$ 收敛 ， 则对满足不等式 $|x| < |\bar{x}|$ 的任何 x，幂级数 $\sum a_n x^n$ 收敛而且绝对收敛 ；若在点 $x = \bar{x}$ 发散 ，则对满足不等式 $|x| > |\bar{x}|$ 的任何 x，幂级数 $\sum a_n x^n$ 发散.

证　$\sum a_n \bar{x}^n$ 收敛，　$\{a_n \bar{x}^n\}$ 有界.　设 $|a_n \bar{x}^n| \le M$，　有

$$|a_n x^n| = |a_n \bar{x}^n| \cdot |\frac{x}{\bar{x}}|^n \le Mr^n, \qquad 其中 \ r = |\frac{x}{\bar{x}}| < 1.$$

$\sum Mr^n < +\infty, \quad \Rightarrow \quad \sum |a_n x^n| < +\infty$.

定理的第二部分是第一部分的逆否命题.

定义（收敛半径）由定理 1，幂级数$\sum a_n x^n$ 的收域是以原点为中心的区间，若以$2R$表示该区间长度，则称 R 为幂级数$\sum a_n x^n$ 的收敛半径 R.

定理 14.2（幂级数的收敛半径）对于幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 设 $\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ， 则

1） $0 < \rho < +\infty$ 时，幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$

2） $\rho = 0$ 时，幂级数的收敛半径 $R = +\infty$

3） $\rho = +\infty$ 时，幂级数的收敛半径 $R = 0$

证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|x| = \rho\,|x|$,（ 强调开方次数与$x$的次数是一致的）. $\Rightarrow$ ……

由于$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho$, $\Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$， 因此亦可用比值法求收敛半径.

推论 若 $\rho = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}|$， 则幂级数的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho}$

四 求收敛半径和收敛域的例子

例 1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛区域.

解 两种方法都得到 $\rho = 1$，即 $R = 1$，收敛区间为 $(-1, 1)$，又 $x = \pm 1$ 时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$，所以原级数收敛，即收敛区域为$[-1, 1]$.

例 2 求幂级数$x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$的收敛域 . ($[-1, 1)$)

例 3 求下列幂级数的收敛域:

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; (ii) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\,x^n$.

例 4 求幂级数$\frac{1}{3}x + \frac{2}{3^2}x^3 + \frac{3}{3^3}x^5 + \frac{4}{3^4}x^7 + \cdots$的收敛域 .

解 $\frac{1}{3}x+\frac{2}{3^2}x^3+\frac{3}{3^3}x^5+\frac{4}{3^4}x^7+\cdots=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}x^{2n}$ 是缺项幂级数 .

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{1}{3}, \quad \Rightarrow \quad R=\sqrt{3}.$$ 收敛区间为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

由于 $x=\pm\sqrt{3}$ 时，通项 $\not\to 0$. 因此，该幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

例 5 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(x-1)^n}$ 的收敛域 .

解 令 $t=\frac{1}{x-1}$，所论级数成为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n$. 由几何级数的敛散性结果，当且仅当 $-2<t<2$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{2}\right)^n$ 收敛. 因此当且仅当 $-2<\frac{1}{x-1}<2$，即 $|x-1|>\frac{1}{2}$ 时级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n(x-1)^n}$ 收敛. 所以所论级数的收敛域为

$$(-\infty,\frac{1}{2})\cup(\frac{3}{2},+\infty).$$

例 6 求幂级数 $\sum 3^n x^{n^2}$ 的收敛半径 .

解 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{3^n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1, \quad \Rightarrow \quad R=1.$

五 幂级数的性质

1 **性质 1（阿贝尔第二定理）**：若 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R，则此级数在收敛域内部 (x_0-R,x_0+R) 上内闭一致绝对收敛；在收敛域 $<x_0-R,x_0+R>$ 上内闭一致收敛.

2 性质 2 ：设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径为 R，和函数为 $s(x)$，则和函数在收敛域 $<x_0-R,x_0+R>$ 上连续，于收敛域内部 (x_0-R,x_0+R) 上可以逐项积分和逐项微分，即：

对 (x_0-R,x_0+R) 上任一点 x，有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x}a_n(t-t_0)^n dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^n=\int_{x_0}^{x}s(t)dt$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dx}[a_n(x-x_0)^n]=\sum_{n=0}^{\infty}na_n(x-x_0)^{n-1}=\frac{d}{dx}s(x),$$

并且逐项求导和逐项积分后的级数（仍为幂级数），其收敛半径仍为 R .

六 幂级数的运算

定义 两个幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在点$x=0$的某邻域内相等是指：它们在该邻域内收敛且有相同的和函数.

定理 14.9 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, $\Leftrightarrow$ $a_n = b_n$ ，$(1 \le n < +\infty)$.

定理 14.10 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为R_a和R_b， $R=\min\{R_a, R_b\}$，则

i) $\sum \lambda a_n x^n = \lambda \sum a_n x^n$， $|x|<R_a$，λ— Const ， $\lambda \ne 0$.

ii) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$， $|x|<R$.

iii) $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$， $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$， $|x|<R$.

例 1: 求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = s(x)$的和函数$s(x)$. 例 2: 求$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{2n}$ 的和函数$s(x)$.

例 3: 求$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$的和函数$s(x)$. 例 4: 求$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$的和函数$s(x)$.

作业：P50 1（2）（3）（4）（6），3, 4

§ 2 函数的幂级数展开

教学目的：掌握泰勒级数和麦克劳林级数展开，初等函数的幂级数展开．熟记一些初等函数的幂级数展开式.

教学要求：(1) 掌握泰勒级数和麦克劳林展开式，五种基本初等函数的幂级数展开.

(2) 学会用逐项求积和逐项求导的方法展开初等函数，并利用它们作间接展开.

教学重点：泰勒级数和麦克劳林展开式，并利用基本初等函数的幂级数展开某些初等函数或作间接展开.

教学难点：利用五种基本初等函数的幂级数展开某些初等函数或作间接展开.

教学方法：系统讲授法.

教学程序：

一 问题的提出

幂级数不仅形式简单，而且有很多特殊的性质（如收敛域是区间；在收敛域内部内闭一致收敛，在收敛域内可逐项积分、逐项微分等）．这就使我们想到，能否把一个函数表示为幂级数来研究？

二 问题的解决

Taylor 级数

设函数$f(x)$在点x_0有任意阶导数.

Taylor 公式： $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)=$

余项 $R_n(x)$ 的形式:

Peano 型余项： $R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right),$

（ 只要求在点 x_0 的某邻域内有 $n-1$ 阶导数， $f^{(n)}(x_0)$ 存在 ）

Lagrange 型余项： $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad \xi$ 在 x 与 x_0 之间.

或
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\quad 0<\theta<1.$$

积分型余项： 当函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有 $n+1$ 阶连续导数时，有

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt.$$

Cauchy 余项： 在上述积分型余项的条件下，有 *Cauchy* 余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}\left(x_0+\theta(x-x_0)\right)(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1},\quad 0\le\theta\le 1.$$

特别地， $x_0=0$ 时，*Cauchy* 余项为

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n x,\qquad \xi \text{ 在 } 0 \text{ 与 } x \text{ 之间}.$$

三 基本初等函数的幂级数展开式

在实际应用中,往往取 $x_0=0$,此时的 Taylor 级数

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots$$

称为 Maclaurin 级数，此时积分型余项为 $r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt$.

1 $\quad e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty$

5 $\quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty$

3 $\quad \cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\qquad -\infty<x<\infty$

4 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots$, $-1<x\le 1$

5 $\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$, $-1\le x\le 1$

6 $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\alpha}^{n}x^{n}$, $x\in<-1,1>$

此处,$\alpha\ne 0,1,2,\cdots$, $C_{\alpha}^{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$

7 $\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$, $-1<x<1$

四 应用基本展开式的例子

例 1 求下列函数按 x 幂级数展开的 Taylor 级数.

(1) $\sin^2 x$; (2) $\frac{6}{(x-1)(x+2)}$; (3) $\ln(1-x-x^2+x^3)$

例 2 求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $x_0=0$ 的 Taylor 展开.

例 3 将 $\frac{1}{x}$: (1)按 $x-1$ 幂级数展开; (2)按 $\frac{x-1}{x+1}$ 幂级数展开.

作业：P58 2，（1）（3）（4）（6）（7）（9）， 3

第十五章 傅里叶级数

§1 傅里叶级数

教学目的：1. 掌握傅里叶级数、傅里叶系数的概念以及计算公式.

2. 熟悉傅里叶级数收敛定律，并能应用它来判断傅里叶级数的收敛性。

教学重点：傅里叶级数展开式.

教学难点：傅里叶级数展开式中系数的确定及收敛定理的运用.

教学方法：讲授法.

傅里叶是法国最伟大的科学家之一．他对数学、科学以及我们当代生活的影响是不可估量的。然而，他并不是一位职业数学家或科学家，他所做的巨大贡献都是忙里偷闲完成的。傅里叶于 1768 年生于法国，幼年父母就去世了。13 岁时他开始对数学十分着迷，常常一个人爬进教室，点着蜡烛研究数学问题到深夜。后来，法国革命暴发，傅立叶于 1793 年参加了革命委员会，1795 年先后两次被捕。法国革命结束后，傅立叶到巴黎教书，之后随拿破仑到埃及并成为

埃及研究院的长久负责人，在那里他写了一本关于埃及的书。直到今天，仍然有人认为他是一位埃及学家，并不知道他对数学和物理学的重大贡献。1802 年，傅立叶回到法国，拿破仑任命他为巴黎警察局长长达 14 年之久，他作为行政官员，工作十分出色，在政界享有崇高威望。1817 年，傅立叶被送入法国科学院，从此步入较为正规的学术研究阶段。

多年的政治生涯及颠簸不定的生活，并没有使傅里叶放弃研究数学的强烈兴趣。事实上，早在 1807 年他就研究了现在称之为傅里叶分析的核心内容。目前，傅里叶的思想和方法被广泛用于线性规划、大地测量以及电话、收音机、X 射线等难以计数的科学仪器中，是基础科学和应用科学研究开发的系统平台。所以，有的科学家称赞傅里叶分析是一首伟大的数学史诗。

傅里叶分析的贡献在于两点：（１）他用数学语言提出任何一个周期函数都能表示为一组正弦函数和余弦函数之和，这一无限和，现称之为傅里叶级数。也就是说，任何一条周期曲线，无论多么跳跃或不规则，都能表示成一组光滑曲线之和。这种表达方式实际上是将信号函数投影在由正弦函数和余弦函数组成的正交基上，实施对信号的傅里叶变换。（２）他解释了为什么这一数学论断是有用的。1807 年，傅立叶显示任何周期函数是由正弦和余弦函数叠加而成。傅里叶分析从本质上改变了数学家对函数的看法，提供了某些微分方程的直接求解方法，为计算机和ＣＤ等数字技术的实现铺平了道路。傅里叶分析同时也是量子力学的自然语言。

上述两点是针对周期函数即周期信号而言的，对于非周期函数，通过傅里叶变换或周期延展转化为周期函数即可。

从本质上讲，傅立叶变换就是一个棱镜，它把一个信号函数分解为众多的频率成分，这些频率又可以重构原来的信号函数，这种变换是可逆的且保持能量不变。傅里叶棱镜与自然棱镜的原理是一样的，只不过自然棱镜是将自然光分解为赤、橙、黄、绿、青、蓝、紫多种颜色的光而已。

下面我们就来讨论在数学与工程技术中都有着广泛应用的一类函数项级数，即由三角函数列所产生的三角级数，也就是傅里叶级数．

一　三角级数•正交函数系

在科学实验与工程技术的某些现象中，常会碰到一种周期运动．最简单的周期运动，可用正弦函数

$$y = A\sin(\omega x + \varphi) \tag{1}$$

来描写．由（1）所表达的周期运动也称为简谐运动，其中 A 为振幅，φ 为初相角，ω 为角频率，于是简谐振动 y 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ ．较为复杂的周期运动，则常是几个简谐振动

$$y_n = A_k \sin(k\omega x + \varphi x), k = 1,2,\cdots,n,$$

的叠加

$$y = \sum_{k=1}^{n} y_k = \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega x + \varphi_k)\,. \tag{2}$$

由于简谐振动 y_k 的周期为 $\frac{T}{k}(T = \frac{2\pi}{\omega}), k = 1,2,\cdots,n,$ 所以函数（2）的周期为 T，对无穷多个简谐振动进行叠加就是到函数项级数

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega x + \varphi_n)\,. \tag{3}$$

若级数(3)收敛，则它所描述的是更为一般的周期运动现象. 对于级数(3)，我们只要讨论 $\omega = 1$（如果 $\omega \neq 1$，可用 ωx 代换 x）的情形. 由于

$$\sin(nx + \varphi_n) = \sin\varphi_n \cos nx + \cos\varphi_n \sin nx,$$

所以

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin\varphi_n \cos nx + A_n \cos\varphi_n \sin nx). \tag{3'}$$

记 $A_0 = \frac{a_0}{2}, A_n \sin\varphi_n = a_n, A_n \cos\varphi_n = b_n, n = 1,2,\cdots,$

则级数（$3'$）可写成

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{4}$$

它是由三角函数列（也称为三角函数系）

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots \tag{5}$$

所产生的一般形式的三角级数.

容易验证，若三角级数（4）收敛，则它的和一定是一个以 2π 为周期的函数.

关于三角级数（4）的收敛有如下定理：

定理 15.1 若级数

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|)$$

收敛，则级数(4)在整个数轴上绝对收敛且一致收敛.

证 对任何实数 x，由于

$$|a_n \cos nx + b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n|,$$

应 用 魏 尔 斯 拉 斯 M 判 别 法 (定 理 13.5) 就 能 推 得 本 定 理 的 结 论. □

为进一步研究三角级数(4)的收敛性,我们先探讨三角函数系(5)具有哪些特性.

首先容易看出,三角函数系(5)中所有函数具有共同的周期2π .

其次,在三角函数系(5)中,任何两个不相同的函数的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分都等于零, 即

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx=0, \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nxdx=0(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nxdx=0(m\neq n),\\&\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nxdx=0.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

而(5)中任何一个函数的平方在$[-\pi,\pi]$上的积分都不等于零，即

$$\left.\begin{aligned}&\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 xdx=\pi,\\&\int_{-\pi}^{\pi}1^2dx=2\pi.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

通常把两个函数φ与ψ在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b\varphi(x)\psi(x)dx=0$$

的函数φ与ψ称为在$[a,b]$上是正交的.由此,我们说三角函数系(5)在$[-\pi,\pi]$上具有正交性,或说(5)是正交函数系.

二　以2π为周期的函数的傅里叶级数

应用三角函数系(5)的正交性,我们讨论三角级数(4)的和函数f与级数(4)的系数a_0,a_n,b_n之间的关系.

定理 15.2　若在整个数轴上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{9}$$

且等式右边级数一致收敛,则有如下关系式：

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx,n=0,1,2,\cdots, \tag{10a}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx,n=1,2,\cdots. \tag{10b}$$

证　由定理条件, 函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续且可积. 对(9)式逐项积分得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx).$$

有关系式(6)知, 上式右边的括号内的积分都等于零. 所以

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{a_0}{2}\cdot 2\pi=a_0\pi\ ,$$

即得

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx\ ,$$

现以 $\cos kx$ 乘（9）式两边（k 为正整数）, 得

$$f(x)\cos kx=\frac{a_0}{2}\cos kx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx\cos kx+b_n\sin nx\cos kx)\ . \tag{11}$$

从第十三章 §1 习题 4 知道, 由级数(9)一致收敛, 可推出级数(11)也一致收敛. 于是对级数(11)逐项求积, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kxdx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos kxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos kxdx).$$

由三角函数的正交性, 右边除了以 a_k 为系数的那一项积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kxdx=\pi$$

外, 其他各项积分都等于 0, 于是得出:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx=a_k\pi(k=1,2,\cdots)\ ,$$

即

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kxdx(k=1,2,\cdots)\ .$$

同理, (9)式两边乘以 $\sin kx$, 并逐项求积, 可得

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kxdx(k=1,2,\cdots)\ .\qquad\square$$

一般地说, 若 f 是以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数, 则可按公式(10)计算出 a_n 和 b_n, 它们称为函数 f (关于三角函数系)的傅里叶系数, 以 f 的傅里叶系数为系数的三角级数(9)称为 f (关于三角函数系)的傅里叶级数, 记作

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx). \tag{12}$$

这里记号”~”表示上式右边是左边函数的傅里叶级数．由定理 15.2 知道:若(9)式右边的三角级数在整个数轴上一致收敛于其和函数 f，则此三角函数就是 f 的傅里叶级数，即此时(12)式中的记号”~”可换为等号. 然而，若从以 2π 为周期且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积的函数 f 出发，按公式(10)求出其傅里叶系数并得到傅里叶级数(12)，这时还需讨论此级数是否收敛. 如果收敛，是否收敛于 f 本身. 这就是下一段所要叙述的内容.

三　收敛定理

下面的定理称为傅里叶级数收敛定理.

定理 15.3　若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑，则在每一点 $x \in [-\pi,\pi]$，f 的傅里叶级数(12)收敛于 f 在点 x 的左、右极限的算术平均值，即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

其中 a_n，b_n 为 f 的傅里叶级数.

下面先对定理中的某些概念作解释，然后举例说明如何运用这个定理把函数展开成傅里叶级数. 关于收敛定理的证明将在§3 中进行.

我们知道,若 f 的导函数在 $[a,b]$ 上连续，则称 f 在 $[a,b]$ 上光滑．但若定义在 $[a,b]$ 上除了至多有有限个第一间断点的函数 f 的导函数在 $[a,b]$ 上除了至多有限个点外都存在且连续，在这有限个点上导函数 f' 的左右极限存在,则称 f 在 $[a,b]$ 上按段光滑.

根据上述定义，若函数 f 在 $[a,b]$ 上按段光滑,则有如下重要性质：

1° f 在 $[a,b]$ 上可积.

2° 在 $[a,b]$ 上每一点都存在 $f(x\pm 0)$，且有：

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t} = f'(x+0), \\ &\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x-t)-f(x-0)}{t} = f'(x-0). \end{aligned} \tag{13}$$

3° 在补充定义 f' 在 $[a,b]$ 上那些至多有限个不存在点上的值后(仍记为 f'), f' 在 $[a,b]$ 上可积.

从几何图形上讲, 在区间 $[a,b]$ 上按段光滑函数, 是由有限个光滑弧段所组成, 它至多有有限个第一类间断点与角点(图 15-1).

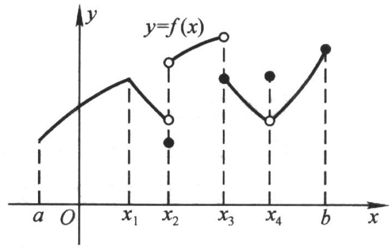


图 15－1

收敛定理指出, f 的傅里叶级数在点 x 处收敛于这一点上 f 的左、右极限的算术平均值 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$; 而当 f 在点 x 连续时, 则有 $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=f(x)$, 即此时 f 的傅里叶级数收敛于 $f(x)$. 于是有如下推论.

推论　若 f 是以 2π 为周期的连续函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑, 则 f 的傅里叶级数在 $(-\infty,\infty)$ 上收敛于 f .

根据收敛定理的假设, f 是以 2π 为周期的函数, 所以系数公式(10)中的积分区间 $[-\pi,\pi]$ 可以改为长度为 2π 的任何区间, 而不影响 a_n, b_n 的值:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\cos nx dx, n=0,1,2,\cdots, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_c^{c+2\pi} f(x)\sin nx dx, n=1,2,\cdots, \end{aligned} \qquad (10')$$

其中 c 为任何实数.

注意: 在具体讨论函数的傅里叶级数展开式时, 常只给出函数 f 在 $(-\pi,\pi]$ (或 $[-\pi,\pi)$) 上的解析表达式, 但读者应理解为它是定义在整个数轴上以 2π 为周期的函数. 即在 $(-\pi,\pi]$ 以外的部分按函数在 $(-\pi,\pi]$ 上的对应关系作周期延拓. 如 f 为 $(-\pi,\pi]$ 上的解析表达式, 那么周期延拓后的函数为

$$\hat{f}(x)=\begin{cases} f(x), x\in(-\pi,\pi], \\ f(x-2k\pi), x\in((2k-1)\pi,(2k+1)\pi, k=\pm1,\pm2,\cdots, \end{cases}$$

如图 15-2 所示. 因此我们说函数 f 的傅里叶级数就是指函数 $\hat{f}$ 的傅里叶级数.

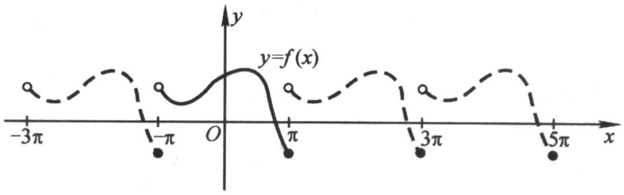


图 15－2　实线与虚线的全体表示 $y=\hat{f}(x)$

例 1　设

$$f(x)=\begin{cases}x,0\le x\le\pi,\\0,-\pi<x<0,\end{cases}$$

求 f 的傅里叶级数展开式.

解　函数 f 及其周期延拓后的图象如图 15-3 所示. 显然 f 是按段光滑

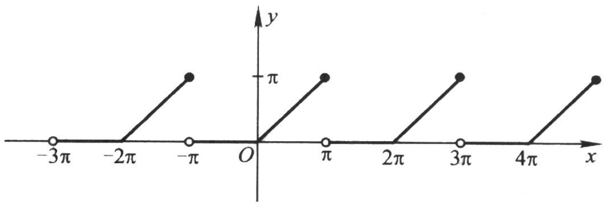


图 15－3

的, 故由定理 15.3(收敛定理), 它可以展开成傅里叶级数. 由于

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\frac{\pi}{2}.$$

当 $n\ge1$ 时,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi-1)=\begin{cases}-\dfrac{2}{n^2\pi},\text{当}n\text{为奇数时},\\0,\qquad\text{当}n\text{为偶数时};\end{cases}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2\pi}\int_0^{\pi}\cos nxdx=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

所以在开区间 $(-\pi,\pi)$ 上

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-(\frac{2}{\pi}\cos x-\sin x)-\frac{1}{2}\sin 2x-(\frac{2}{9\pi}\cos 3x-\frac{1}{3}\sin 3x)\cdots.$$

在 $x=\pm\pi$ 时,上式右边收敛于

$$\frac{f(\pi-0)+f(-\pi+0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

于是,在 $[-\pi,\pi]$ 上 f 的傅里叶级数的图象如图 15-4 所示(注意它与图 15-3 的差别). □

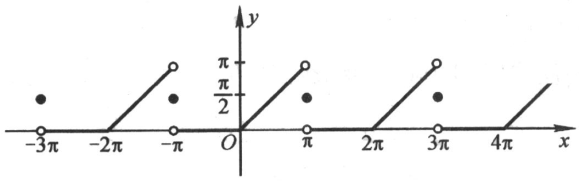


图 15－4

例 2　把下列函数展开成傅里叶级数:

$$f(x)=\begin{cases}x^2,0<x<\pi,\\0,x=\pi,\\-x^2,\pi<x\le 2\pi.\end{cases}$$

解　f 及其周期延拓的图形如图 15-5 所示. 显然 f 是按段光滑的，因此它可以展开成傅里叶级数.

在 $(10')$ 中令 $c=0$ 来计算傅里系数如下：

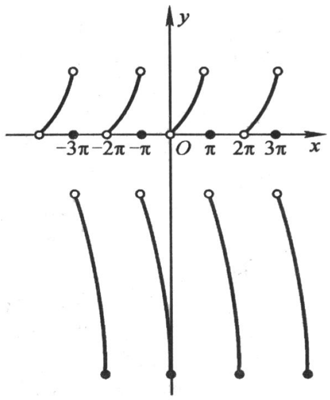


图 15－5

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2dx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)dx$$

$$=\frac{\pi^2}{3}-\frac{7\pi^2}{3}=-2\pi^2.$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\cos nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}[(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3})\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx]\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}[(\frac{x^2}{n}-\frac{2}{n^3})\sin nx+\frac{2x}{n^2}\cos nx]\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$=\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1],$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}(-x^2)\sin nxdx$$
$$=\frac{1}{\pi}[(-\frac{x^2}{n}+\frac{2}{n^3})\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx]\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi}[(-\frac{x^2}{n}+\frac{2}{n^3})\cos nx+\frac{2x}{n^2}\sin nx]\Big|_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\frac{2}{\pi}\{\frac{\pi^2}{n}+(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3})[1-(-1)^n]\}.$$

所以当$x\in(0,\pi)\bigcup(\pi,2\pi)$时,

$$f(x)=-\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{4}{n^2}[(-1)^n-1]\cos nx+\frac{2}{\pi}[\frac{\pi^2}{n}+(\frac{\pi^2}{n}-\frac{2}{n^3})(1-(-1)^n)]\sin nx\}$$
$$=-\pi^2-8(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots)+\frac{2}{\pi}\{(3\pi^2-4)\sin x$$
$$+\frac{\pi^2}{2}\sin 2x+(\frac{3\pi^2}{3}-\frac{4}{3^3})\sin 3x+\frac{\pi^2}{4}\sin 4x+\cdots\}.$$

当$x=\pi$时, 由于

$$\frac{f(\pi-0)+f(\pi+0)}{2}=0$$

所以

$$0=-\pi^2+8(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots). \tag{14}$$

当$x=0$或2π是，由于

$$\frac{1}{2}(f(0-0)+f(0+0))=\frac{1}{2}(-4\pi^2+0)=-2\pi^2,$$

因此

$$-2\pi^2=-\pi^2-8(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots). \tag{15}$$

由(14)或(15)都可推得

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$ □

作业布置：Ｐ７６　１（１）,(2)；３

§2　以$2l$为周期的函数的展开式

教学目的：1. 掌握以$2l$为周期的函数以及偶函数和奇函数的傅里叶级数展开式.

2. 掌握将函数展开成正弦级数和余弦级数的方法。

教学重点：以$2l$为周期的函数的展开式.

教学难点：对函数作相应的奇式或偶式延拓进行傅里叶级数展开.
教学方法：讲授法.

在上节提到的收敛定理中，我们假设函数 f 是以 2π 为周期的，或是定义在 $(-\pi,\pi]$ 上然后作以 2π 为周期延拓的函数．本节讨论以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数展开式及偶函数和奇函数的傅里叶级数展开式.

一　以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的函数,通过变量置换

$$\frac{\pi x}{l}=t \text{或} \quad x=\frac{lt}{\pi}$$

可以把 f 变换成以 2π 为周期的 t 的函数 $F(t)=f(\frac{lt}{\pi})$．若 f 在 $[-l,l]$ 上可积，则 F 在 $[-\pi,\pi]$ 上也可积，这时函数 F 的傅里叶级数展开式是：

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt), \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos ntdt, n=0,1,2\cdots,\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin ntdt, n=0,1,2,\cdots. \end{aligned} \tag{2}$$

因为 $t=\frac{\pi x}{l}$,所以 $F(t)=f(\frac{lt}{\pi})=f(x)$．于是由(1)与(2)是分别得

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}) \tag{3}$$

与

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,\cdots,\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,\cdots \end{aligned} \tag{4}$$

这里(4)式是以 $2l$ 为周期的函数 f 的傅里叶系数，(3)式是 f 的傅里叶级数.

若函数 f 在 $[-l,l]$ 上按段光滑,则同样可由收敛定理知道

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}). \tag{5}$$

例 1　把函数

$$f(x)=\begin{cases}0,-5\le x<0\\3,0\le x<5\end{cases}$$

展开成傅里叶级数.

解 由于 f 在(-5 ,5)上按段光滑，因此可以展开成傅里叶级数．根据(4)式，有

$$a_n=\frac{1}{5}\int_{-5}^{0}0\cdot cos\frac{n\pi x}{5}dx+\frac{1}{5}\int_{0}^{5}3\,cos\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{n\pi}sin\frac{n\pi x}{5}\Big|_0^5=0,n=1,2,\cdots,$$

$$a_0=\frac{1}{5}\int_{-5}^{5}f(x)dx=\frac{1}{5}\int_{0}^{5}3dx=3,$$

$$b_n=\frac{1}{5}\int_{0}^{5}3\,sin\frac{n\pi x}{5}dx=\frac{3}{5}[-\frac{5}{n\pi}cos\frac{n\pi x}{5}]\Big|_0^5=\frac{3(1-cos\,n\pi)}{n\pi}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6}{(2k-1)\pi},n=2k-1,k=1,2,\cdots,\\ 0,n=2k,k=1,2,\cdots.\end{cases}$$

代入(5)式,得

$$f(x)=\frac{3}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{5}=\frac{3}{2}+\frac{6}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{5}+\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5}+\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{5}+\cdots).$$ 这里

$x\in(-5,0)\cup(0,5)$．当 $x=0$ 和 ±5 时级数收敛于 $\frac{3}{2}$．□

二 偶函数与奇函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的偶函数,或是定义在 $[-l,l]$ 上的偶函数,则在 $[-l,l]$ 上, $f(x)\cos nx$ 是偶函数, 函数 $f(x)\sin nx$ 是奇.因此， f 的傅里叶系数(4)是

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,n=0,1,2,\cdots,\\ b_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0,n=1,2,\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

于是 f 的傅里叶级数只含有余弦函数的项,即

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},\tag{7}$$

其中 a_n 如(6)式所示,(7)式右边的级数称为**余弦级数**.

同理,若 f 是以 $2l$ 为周期的奇函数,或是定义在 $[-l,l]$ 上的奇函数,则可以推得

$$\left.\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,n=0,1,2,\cdots,\\ b_n&=\frac{2}{l}\int_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0,n=1,2,\cdots.\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

所以当 f 为奇函数时,它的傅里叶级数只含有正弦函数的项,即

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},\tag{9}$$

其中 b_n 如(8)式所示.(9)式右边的级数称为**正弦级数**.

若 $l=\pi$,则偶函数 f 所展开成的余弦级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ ，} \tag{10}$$

其中

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nxdx, n=0,1,2,\cdots. \tag{11}$$

当 $l=\pi$ 且 f 为奇函数时,则它展开成的正弦级数为

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \tag{12}$$

其中

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx \tag{13}$$

在实际应用中,有时需把定义在 $[0,\pi]$ 上(或一般地 $[0,l]$ 上)的函数展开成余弦级数或正弦函数. 为此,先把定义在 $[0,\pi]$ 上的函数作偶式延拓或作奇式延拓到 $[-\pi,\pi]$ 上(如图 15-6(a)或(b)). 然后求延拓后函数的傅立叶级数,即得(10)或(12)形式. 但显然可见,对于定义在 $[0,\pi]$ 上的函数,将它展开成余弦级数或正弦级数时,可以不必作延拓而直接由(11)式或(13)式计算出它的傅里叶系数.

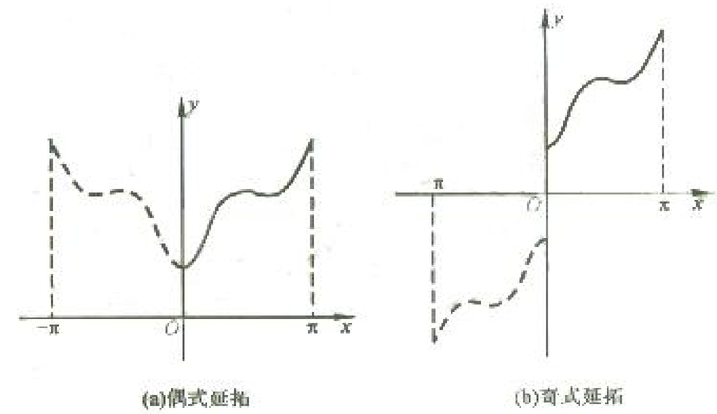


图 15-6

例 2　设函数 $f(x)=|\sin x|, -\pi \le x < \pi$ ，求 f 的傅里叶级数展开式.

解　f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数，图 15-7 是这函数及其周期延拓的图形. 由于 f 是按段光滑函数，因此，可以展开成傅里叶级数,而且这个级数为余弦级数.

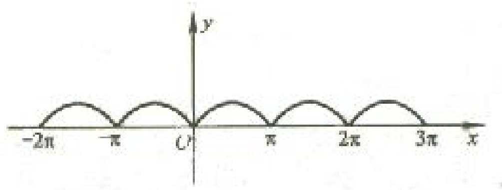


图 15－7

由(10)式(这时可把其中"~"改为"=")知 $|\sin x| = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$，其中

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{4}{\pi}, \\
a_1 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x dx = 0, \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}[\sin(1-n)x + \sin(1+n)x]dx \\
&= \frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2-1}[\cos(n-1)\pi - 1], (n \neq 1) \\
&= \begin{cases} 0, n = 3,5,\cdots, \\ -\frac{4}{\pi}\frac{1}{n^2-1}, n = 2,4,\cdots. \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
|\sin x| &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{4}{4m^2-1}\cos 2mx \\
&= \frac{2}{\pi}[1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2mx}{4m^2-1}], -\infty < x < +\infty.
\end{aligned}
$$

当 $x = 0$ 时,有 $$0 = \frac{2}{\pi}(1 - 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{4m^2-1})$$

由此可得 $\frac{1}{2} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2m-1)(2m+1)} + \cdots.$ □

例 3 把定义在 $[0,\pi]$ 上的函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, 0 < x < h, \\ \frac{1}{2}, x = h, \\ 0, h < x \le \pi \end{cases}$$ (其中 $0 < h < \pi$)展开成正弦级数.

解 函数 f 如图 15-8 所示,它是按段光滑函数,因而可以展开成正弦级数(12),其系数

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nxdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{h}\sin nxdx$$
$$= \frac{2}{\pi}(\frac{-\cos nx}{n})\Big|_0^h = \frac{2}{n\pi}(1-\cos nh).$$

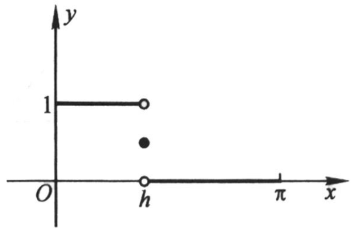


图 15－8

所以

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nh)}{n}\sin nx, 0<x<h, h<x<\pi.$$

当 $x=0$ 时,级数的和为 0,当 $x=h$ 时,有

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\cos nh)}{n}\sin nh = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$$

本题中若 $h=\pi$ 则有

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx$$
$$= \frac{4}{\pi}(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + ...), 0<x<\pi,$$

而且当 $x=0,\pi$ 时,级数收敛于 0. □

例４ 把 $f(x)=x$ 在(0,2)内展开成：

(i) 正弦级数;

(ii) 余弦级数.

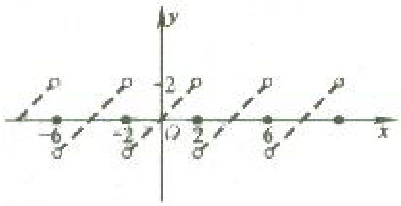


图 15－9

解 (i)为了要把 f 展开为正弦级数，对作 f 奇式周期延拓(图 15-9)，并由公式(8)有

$$a_n = 0, n = 0,1,2,\cdots,$$
$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}dx = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$$
$$= \frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}, n=1,2,\cdots.$$

所以当 $x\in(0,2)$ 时,由(9)及收敛定理得到

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}$$
$$= \frac{4}{\pi}(\sin\frac{\pi x}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \cdots). \quad (14)$$

但当 $x=0,2$ 时，右边级数收敛于 0.

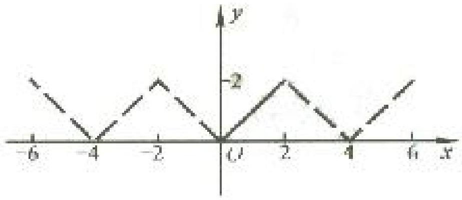


图 15－10

(ii)为了要把 f 展开为余弦级数，对 f 作偶式周期延拓(图 15-10)．由公式(6)得的 f 傅里叶系数为

$$b_n=0,n=,1,2,\cdots,$$
$$a_0=\int_0^2 xdx=2,$$
$$a_n=\frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1)$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1],n=1,2,\cdots$$

或

$$a_{2k-1}=\frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2},a_{2k}=0(k=1,2,\cdots),$$

所以当 $x=(0,2)$ 时,由(7)及收敛定理得到

$$f(x)=x=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$$
$$=1-\frac{8}{\pi^2}(\cos\frac{\pi x}{2}+\frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{2}+\frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{2}+\cdots).\qquad（15）□$$

由例 4 可以看到，同样一个函数在同样的区间上可以用正弦级数表示，也可以用余弦级数表示，甚至作适当延拓后，可以用更一般的形式(5)来表示．

作业布置：Ｐ７７　１（２）；４．

§3　收敛定理的证明

教学目的：了解傅里叶级数收敛定理的证明,熟悉贝塞耳不等式以及作为其推论的黎曼－勒贝格定理．
教学重点：傅立叶级数收敛定理．
教学难点：两个预备定理的证明．
教学方法：讲授法．

为了证明傅里叶级数 的收敛定理 ，先证明下面两个预备定理．

预备定理 1（贝塞耳（Bessel）不等式） 若函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积，则

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx \tag{1}$$

其中 a_n， b_n 为 f 的傅里叶系数.(1)式称为**贝塞耳不等式**.

证 令

$$S_m(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) .$$

考察积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_m(x)]^2dx=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)dx+\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)dx . \tag{2}$$

由于

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{n=1}^{m}(a_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx+b_n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx) .$$

根据傅里叶系数公式(§1(10))可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_m(x)dx=\frac{\pi}{2}a_0^2+\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2) . \tag{3}$$

对于 $S_m^2(x)$ 的积分,应用三角函数的正交性,有

$$\int_{-\pi}^{\pi}S_m^2(x)dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{m}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)\right]^2dx$$

$$=\left(\frac{a_0^2}{2}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi}dx+\sum_{n=1}^{m}\left[a_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 nxdx+b_n^2\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 nxdx\right]$$

$$=\frac{\pi a_0^2}{2}+\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n^2+b_n^2) . \tag{4}$$

将(3),(4)代入(2),可得

$$0\le\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)-S_m(x)\right]^2dx$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx-\frac{\pi a_0{}^2}{2}-\pi\sum_{n=1}^{m}(a_n{}^2+b_n{}^2).$$

因而

$$\frac{a_n{}^2}{2}+\sum_{n=1}^{m}f^2(a_n{}^2+b_n{}^2)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\right]^2dx,$$

它对任何正整数 m 成立.而 $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[f(x)\right]^2dx,$ 为有限值,所以正项级数

$$\frac{a_0^{\ 2}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2})$$

的部分和数列有界,因而它收敛且有不等式(1)成立. □

推论 1 若 f 为可积函数,则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx=0,\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

因为(1)的左边级数收敛,所以当 $n\to\infty$ 时,通项 $a_n^{\ 2}+b_n^{\ 2}\to 0,$ 亦即有 $a_n\to 0$ 与 $b_n\to 0$ 这就是(5)式.这个推论也称为**黎曼—勒贝格定理**.

推论 2 若 f 为可积函数,则

$$\left.\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})xdx=0,\\ \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})xdx=0.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

证 由于

$$\sin(n+\frac{1}{2})x=\cos\frac{x}{2}\sin nx+\sin\frac{x}{2}\cos nx,$$

所以

$$\begin{aligned}&\int_0^{\pi} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})xdx=\int_0^{\pi}[f(x)\cos\frac{x}{2}]\sin nxdx+\int_0^{\pi}[f(x)\sin\frac{x}{2}]\cos nxdx\\ &=\int_{-\pi}^{\pi}F_1(x)\sin nxdx+\int_{-\pi}^{\pi}F_2(x)\cos nxdx,\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$F_1(x)=\begin{cases}f(x)\cos\dfrac{x}{2},0\le x\le\pi,\\ 0,-\pi\le x<0,\end{cases}$$

$$F_2(x)=\begin{cases}f(x)\sin\dfrac{x}{2},0\le x\le\pi,\\ 0,-\pi\le x<0.\end{cases}$$

显见 F_1 与 F_2 和 f 一样在 $[-\pi,\pi]$ 上可积．由推论 1，(7)式右端两积分的极限在 $n\to\infty$ 时都等于零，所以左边的极限为零.

同样可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(n+\frac{1}{2})xdx=0.$$ □

预备定理 2 若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积,则它的傅里叶级数部分和 $S_n(x)$ 可写成

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\ , \qquad (8)$$

当 $t=0$ 时,被积函数中的不定式有极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}=n+\frac{1}{2}$$

来确定.

证　在傅里叶级数部分和

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k\cos kx+b_k\sin kx$$

中，用傅里叶系数公式代入，可得

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)du+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}[(\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos kudu)\cos kx+(\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin kudu)\sin kx]$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)]du$$

令

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)]du.$$

$u=x+t$,得

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x}f(x+t)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt]dt$$

有上面这个积分看到，被积函数是周期为 2π 的函数，因此在 $[-\pi-x,\pi-x]$ 上的积分等于 $[-\pi,\pi]$ 上的积分，再由第十二章 § 3,(21)式，即

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}, \qquad (9)$$

就得到

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\ .$$ □

(8)式也称为 f 的傅里叶级数部分和的积分表示式.

现在证明定理 15.3(收敛定理),重述如下：

若以 2π 为周期的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上按段光滑,则在每一点 $x\in[-\pi,\pi]$, f 的傅里叶级数（§ 1，(12)）收敛于 f 在点 x 的左右极限的算术平均值,即

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{n}a_n\cos nx+b_n\sin nx,$$

其中 a_n， b_n 为 f 的傅里叶级数.

证 只要证明在每一点 x 处下述极限成立：

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-S_n(x)\right]=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right]=0,$$

或证明同时有

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x+0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right]=0, \tag{10}$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(x-0)}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\right]=0, \tag{11}$$

现在先证明(10)式,对(9)式积分有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx\right)dx=1.$$

由于上式左边为偶函数,由此两边乘以 $f(x+0)$ 后得到

$$\frac{f(x+0)}{2}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x+0)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

从而(10)式可以改为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+0)+f(x+t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=0. \tag{12}$$

令

$$\varphi(t)=-\frac{f(x+t)-f(x+0)}{2\sin\frac{t}{2}}=-\left[\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right]\frac{\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}},t\in(0,\pi].$$

由§1(13)式得

$$\lim_{t\to0^+}\varphi(t)=-f'(x+0)\cdot1=-f'(x+0).$$

再令 $\varphi(0)=-f^{'}(x+0)$，则函数 φ 在点 $t=0$ 右连续,因为 φ 在 $[0,\pi]$ 上至多只有有限个第一类间断点,所以 φ 在 $[0,\pi]$ 上可积，根据预备定理 1 的推论 2

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+0)-f(x+t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt=0\ .$$

这就证得(12)式成立，从而(10)式成立.

用同样方法可证(11)也成立.

作业布置：Ｐ８３　２．